О. М. Дубініна

Визначений інтеграл і система комп'ютерної математики MathCad

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. М. Дубініна

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ
І СИСТЕМА КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ MATHCAD

Навчально-методичний посібник
для студентів вищих технічних навчальних закладів

Рекомендовано Вченою радою НТУ «ХПІ»

Харків
2017

УДК 517.3
ББК 22.161
Д 79

Рецензенти: *Є. Л. Піротті*, доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; *О. Д. Черенков*, доктор технічних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка.

Гриф надано Вченою радою Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», протокол № 2 від 03.03.2017 року.

Дубініна О. М.

Д 79 Дубініна О. М. Визначений інтеграл і система комп'ютерної математики MathCad: навчально-методичний посібник / О. М. Дубініна. – Харків: НТУ «ХПІ», 2017. – 225 с.

Іл. 91. Табл. 1. Бібліогр. назв. 24

ISBN 978-617-7470-60-0

Навчально-методичний посібник містить теоретичні відомості, докладно розібрані приклади, задачі для аудиторного та самостійного розв'язку, а також 30 варіантів типових індивідуальних домашніх завдань.

Призначено насамперед для студентів, що здобувають вищу освіту у галузі інформаційних технологій, може бути корисним студентам і викладачам усіх технічних спеціальностей.

УДК 517.3
ББК 22.161

ISBN 978-617-7470-60-0

Зміст

Передмова

Даний посібник призначений для студентів першого року навчання, які здобувають вищу освіту у галузі знань «Інформаційні технології» (постанова Кабінету Міністрів України від 29 квітня 2015 р. № 266) зі спеціальностей «Інженерія програмного забезпечення», «Комп’ютерні науки та інформаційні технології», «Комп’ютерна інженерія», «Системний аналіз», «Кібербезпека», а також може бути корисним студентам інших технічних спеціальностей. Методичний посібник написаний на основі лекцій, що читаються на факультеті Комп’ютерних наук і програмної інженерії у Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут».

Навчально-методичний посібник містить всю основну інформацію, що відноситься до важливого розділу інтегрального числення, стосовно наступних тем: визначений інтеграл і його властивості, невласні інтеграли першого та другого роду, теореми порівняння, абсолютна і умовна збіжність невласних інтегралів. Велику увагу приділено застосуванню визначеного і невласного інтеграла до вирішення різного роду завдань математичного аналізу, а також геометричних і фізичних задач. Тому наведений у посібнику матеріал надає можливість широкого його використання студентами: на практичних заняттях; для самостійного вивчення матеріалу; для виконання індивідуального завдання; для підготовки до заліку чи контрольної роботи; для підготовки до іспиту чи тестування та інше.

Оскільки посібник спрямований на підвищення продуктивності та ефективності самостійної роботи студентів з певної теми, то він містить індивідуальні завдання по кожному розділу. У посібнику також наведені необхідні теоретичні відомості і досить великий ряд прикладів із рішеннями, які допоможуть студентам у роботі над індивідуальними завданнями. Посібник носить не тільки методичний характер, а й довідковий. Новий навчальний матеріал засвоюється студентами легше, особливо тими, що мають прогалини у довузівській підготовці, якщо він супроводжується великою кількістю прикладів, які його не тільки ілюструють, але й мають коментарі з елементарної математики. Тому у методичному посібнику теоретичний матеріал викладено коротко і доступно, а приклади розглянуто більш докладно. Виклад матеріалу ведеться доступною, але науковою строгою математичною мовою.

Змістовне навантаження деяких завдань, що пропонуються студентам для самостійної роботи більше, ніж передбачає навчальна програма. Це дозволяє викладачеві варіювати кількістю і складністю завдань для практичних занять і індивідуальної домашньої роботи.

Відмінністю пропонованого посібника від аналогічних видань є наявність розділу, у якому надається короткий опис роботи над визначеним інтегралом у системі комп'ютерної математики MathCad, включаючи приклади. При цьому звіт студентів про виконання індивідуального розрахунково-графічного завдання додатково передбачає наявність матеріалу про лабораторну роботу у середовищі MathCad. Серед великої кількості систем комп'ютерної математики було обрано MathCad, як найзручніший додаток для математичних і інженерних обчислень, оскільки документи цього середовища представляють розрахунки у вигляді, дуже близькому до стандартної математичної мови, що спрощує постановку і вирішення завдань. До того ж, MathCad містить текстовий і формульний редактор, обчислювач, засоби наукової і ділової графіки, а також величезну базу довідкової інформації, як математичної, так і інженерної.

При оформленні звітів з лабораторної роботи студенти повинні дотримуватися наступних правил: 1) звіт необхідно оформити засобами MathCad і роздруковувати; 2) звіт повинен містити прізвище виконавця, групу та бути розташований наприкінці зошита для індивідуальних завдань; 3) зміст звіту має включати розрахункові формули з коментарями, необхідні висновки результатів і графіки.

Захист студентом індивідуального завдання обов'язково передбачає обізнаність у наведених розрахунках, вміння їх пояснити, знання відповідей на всі контрольні питання, список яких наведено у додатку 2.

Загальні положення про визначений інтеграл

Поняття визначеного інтеграла, суми Дарбу, інтеграл із змінною границею

Поняття «*визначений інтеграл*» було введено в математиці для вирішення певного класу задач, що призводять до необхідності обчислення інтегральних сум та їх границь. Відомості про визначений інтеграл мають досить глибоке коріння – понад 2000 років тому. Але широкого застосування він довго не мав, оскільки безпосереднє знаходження границь інтегральних сум є досить складним навіть у найпростіших випадках. Відкриття невизначеного інтегралу і зручних способів його обчислення відбулося значно пізніше. Однак, подальше – у XVII столітті встановлення зв'язка між визначеним і невизначеним інтегралами дозволило значно розширити сфери застосування інтегрального числення.

Нехай на проміжку $[a;b]$ визначено функцію $f(x)$ (рис. 1). Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n частин довільним чином точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_n = b$ та обчислимо довжину кожного з n дрібних сегментів: $[x_0; x_1], [x_1; x_2], ..., [x_{k-1}; x_k], ..., [x_{n-1}; x_n]$, а саме – $\Delta_k x = x_k - x_{k-1}$. У кожному малому сегменті оберемо довільну точку ξ_k, $k = \overline{1,n}$: $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$. Ці точки називаємо точками пунктуації при даному способі розбиття відрізку $[a;b]$ на частини. Складаємо з усіх отриманих добутків $f(\xi_k)\cdot \Delta x_k$, так звану, інтегральну суму, яка очевидно залежить від способу розбиття відрізку $[a;b]$ на дрібні частини та від обрання точок пунктуації: $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k$.

Якщо існує границя, яка не залежить від способу розбиття та вибору точок пунктуації, то вона називається *визначеним інтегралом* від $f(x)$ на проміжку $[a;b]$, при умові, що $max\, \Delta x_k \to 0$.

Таким чином, $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max \Delta x_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$.

Числа a і b називаються відповідно нижньою і верхньою границями інтегрування, $f(x)$ – підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x – змінною інтегрування, відрізок $[a; b]$ – областю інтегрування. Позначимо далі, що $\lambda = \max\limits_{1<i<n}\{\Delta x_i\}$ – це довжина найбільшого відрізку розбиття. Якщо $\lambda \to 0$, то вочевидь число відрізків розбиття – n для проміжку $[a; b]$ має прагнути до нескінченності.

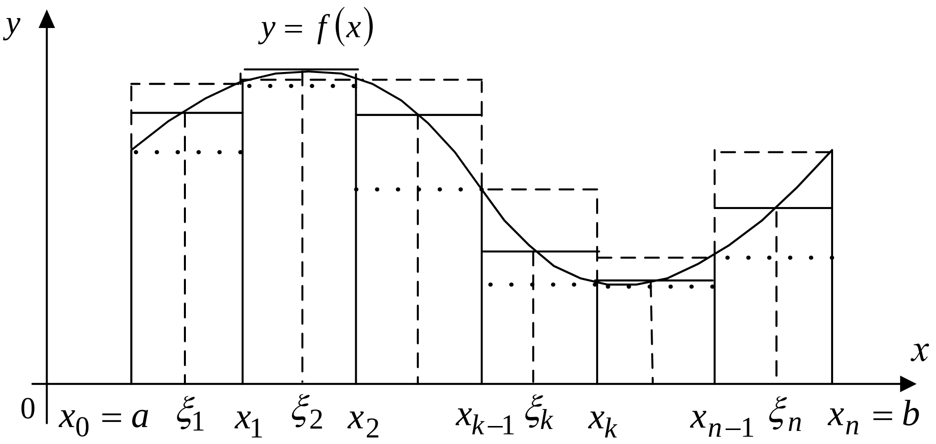


Рис. 1 Графік функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$

Функція $y = f(x)$, для якої на відрізку $[a; b]$ існує кінцевий $\int\limits_a^b f(x)dx$, називається інтегрованою на проміжку $[a; b]$, при цьому границя інтегральної суми не залежить ні від способу розбиття сегмента $[a; b]$ на частини, ні від вибору точок ξ_k у кожній з дрібних частин.

У теоремі про існування визначеного інтеграла вказується на те, що будь-яка безперервна на проміжку $[a;b]$ функція $f(x)$ є інтегрованою на ньому. Відтак, надалі підінтегральну функцію будемо вважати безперервною.

У теорії визначеного інтеграла фундаментальне значення мають так звані *суми Дарбу*. Вони вводяться для з’ясування умов інтегрованості $f(x)$ і існування визначеного інтеграла.

Позначимо через m і M відповідно найменше та найбільше значення функції на відрізку $[a;b]$. На кожному з отриманих шляхом подрібнення проміжку інтегрування відрізків – Δx_i знайдемо найменше – m_i та найбільше – M_i значення функції. Таким чином, кожному з дрібних відрізків відповідають наступні значення: $[x_0; x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1; x_2] \to m_2, M_2$; …; $[x_{i-1}; x_i] \to m_i, M_i$; …; $[x_{n-1}; x_n] \to m_n, M_n$.

Складемо сумми: $\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + ... + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ і

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + ... + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i .$$

Чисельно вони являють собою площі східчастих фігур (рис. 1), складених відповідно з вхідних і вихідних прямокутників і обидві суми мають своєю границею інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Сумма $\underline{S}_n$ називається *нижньою інтегральною суммою*, а сумма $\overline{S}_n$ – *верхньою інтегральною суммою Дарбу*. Тепер для будь-якого дрібного відрізку розбиття Δx_i можливо записати: $m_i\Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$. На рис. 1 показано геометричну інтерпретацію отриманої нерівності для кожного дрібного відрізка. Легко побачити, що права частина нерівності дорівнює площі описаного навколо криволінійної трапеції прямокутника, а ліва частина – вписаного.

Після сумування отримуємо: $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$. Відтак, $\underline{S}_n \le S_n \le \overline{S}_n$. Геометрично ця система нерівностей представляється в такий спосіб: графік функції $f(x)$, відповідно і криволінійна трапеція, обмежені зверху описаною ламаною лінією, площа якої – $\overline{S}_n$, а знизу – вписаною ламаною з площею $\underline{S}_n$.

Приклад 1. Обчислити визначений інтеграл за допомогою складання інтегральної суми та переходу до границі: $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$.

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок $[1;\,2]$ на n нерівних між собою частин: $1, \sqrt[n]{2}, \left(\sqrt[n]{2}\right)^2, \ldots, \left(\sqrt[n]{2}\right)^k, \ldots, 2$.

Відмітимо, що різниця $\left(\sqrt[n]{2}\right)^{k+1} - \left(\sqrt[n]{2}\right)^k = 2^{\frac{1}{n}} \cdot \left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) < 2 \cdot \left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

прагне до нуля при необмеженому зростанні n. У якості точок пунктуації оберемо ліві кінці відрізків розбиття. Тоді:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) + 2^{\frac{1}{n}}\left(2^{\frac{2}{n}} - 2^{\frac{1}{n}}\right) + \ldots + 2^{\frac{k}{n}}\left(2^{\frac{k+1}{n}} - 2^{\frac{k}{n}}\right) + \ldots + 2^{\frac{n-1}{n}}\left(2 - 2^{\frac{n-1}{n}}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln 2 .$$

Далі зупинимось на інтегралі з такими границями, що змінюються. Нехай в інтегралі $\int\limits_a^b f(x)dx$ нижню границю *a* = *const.* зафіксовано, а верхня границя інтегрування – b змінюється. Зрозуміло, якщо верхня границя змінюється, її у такому випадку можна розглядати як змінну величину і позначити $b = x$, внаслідок чого змінюється як функція змінної x і значення самого інтеграла. Позначимо: $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.

Функція $\Phi(x)$ називається інтегралом із змінною верхньою границею. У формулі для його обчислення змінна інтегрування під знаком інтеграла змінена на букву t для зручності, хоча вона має ті ж самі значення, що і змінна – x.

Теорема (властивість інтеграла із змінною верхньою границею). Похідна функції $\Phi(x)$ по змінній верхній границі x дорівнює значенню підінтегральної функції від верхньї границі:

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x) \text{ або } \frac{d}{dx}\Phi(x)=f(x).$$

У цьому випадку $\Phi(x)$ можна розглядати як первісну підінтегральної функції. Аналогічно можна ввести інтеграл із змінною нижньою границею, або ж визначити його за допомогою інтегралу із змінною верхньою границею.

Теорема про похідну інтеграла за змінною верхньою границею є однією з основних теорем математичного аналізу. Ця теорема розкриває глибокий зв'язок між операціями визначеного інтегрування і диференціювання. Теорема показує, що функція $\int_a^x f(t)dt$ є первісною для $f(x)$.

Якщо змінна верхня границя є функцією від x, то застосовуючи теорему про похідну складної функції, отримуємо: $\frac{d}{dx}\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\right)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

Якщо змінною є нижня, а не верхня границя, то потрібно спочатку поміняти місцями границі інтегрування:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\psi(x)}^{b} f(t)dt\right)=-\frac{d}{dx}\left(\int_b^{\psi(x)} f(t)dt\right)=-f(\psi(x))\psi'(x).$$

І нарешті, коли змінними є обидві границі інтегрування, потрібно представити інтеграл у вигляді суми двох інтегралів, одного зі змінною верхньою границею і іншого зі змінною нижньою границею.

Приклад 2. Знайти похідну від інтеграла зі змінними верхньою і нижньою границями: $\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{x^3}^{x^5}\sin(t+1)dt\right)$.

Розв'язання.

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{x^3}^{x^5}\sin(t+1)dt\right)=\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{x^3}^{a}\sin(t+1)dt\right)+\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{a}^{x^5}\sin(t+1)dt\right)=$$

$$=5x^4\sin\left(x^5+1\right)-3x^2\sin\left(x^3+1\right).$$

Підінтегральна функція безперервна на всій осі абсцис, тому похідна існує для $\forall x\in(-\infty;\ +\infty)$.

Теорема-формула Ньютона-Лейбніца, деякі властивості визначеного інтеграла

Обчислення визначених інтегралів як границь інтегральних сум пов'язано з певними труднощами навіть в тих випадках, коли підінтегральна функція є простою. Тому виникає потреба у практично зручному методі обчислення визначених інтегралів. У нагоді стає теорема Ньютона-Лейбніца, що дозволяє зводити обчислення визначеного інтеграла до невизначеного. Ця теорема має фундаментальне значення у математичному аналізі.

Теорема Ньютона-Лейбніца. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $F(x)$ – одна з її первісних, тоді справедливою є формула:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Приклад 3. Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_0^2\frac{1}{x^2+4}dx$.

Розв'язання. На підставі формули Ньютона-Лейбніца, а також використовуючи таблицю невизначених інтегралів (Додаток 1), отримуємо:

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Приклад 4. Обчислити визначений інтеграл: $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

Розв'язання. На підґрунті формули Ньютона-Лейбніца, теореми про інваріантність формул інтегрування, а також таблиці невизначених інтегралів (Додаток 1), отримуємо:

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left| \frac{dx}{x} = d(1+\ln x) \right| = \int_1^{e^3} (1+\ln x)^{-\frac{1}{2}} d(1+\ln x) =$$

$$= \frac{(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^{e^3} = 2\sqrt{1+\ln x}\Big|_1^{e^3} = 2\left(\sqrt{1+3} - \sqrt{1}\right) = 2.$$

Приклад 5. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$.

Розв'язання. На підґрунті формули Ньютона-Лейбніца, теореми про інваріантність формул інтегрування, а також таблиці невизначених інтегралів (Додаток 1), отримуємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = \left| d(2x) = 2dx;\ dx = \frac{1}{2}d(2x) \right| = \frac{1}{2}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos 2\cdot\frac{\pi}{4} - \cos 0\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2}$$

Деякі властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \dots.$

2. Інтеграл на відрізку нульової довжини: $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

4. $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

5. $\int\limits_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int\limits_a^b f(x)dx, \quad C = const$.

6. Адитивність визначеного інтеграла: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, $c \in (a; b)$.

7. Збереження знака підінтегральної функції визначеним інтегралом: якщо $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

8. Монотонність визначеного інтеграла: якщо $f(x) \leq g(x)$ для $\forall x \in [a; b]$, $a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.

9. Теорема про середнє інтегральне значення функції: якщо функція $f(x)$ – неперервна на $[a; b]$, де $a < b$, то $\exists \ \xi \in [a; b]$, таке, що $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. Звідси: $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$.

10. Теорема про оцінку визначеного інтеграла по області: якщо m *і* M *– найменше та найбільше значення функції* $f(x)$ *на* $[a; b]$, *і* $a < b$ *, то* $m \cdot (b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a)$.

11. Узагальнена теорема про середнє значення інтеграла: якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на відрізку $[a; b]$, а функція $y = f(x)$ обмежена

зверху та знизу: $m \le f(x) \le M$, тоді: $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx$, при цьому $m \le \mu \le M$; де μ – середнє інтегральне значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$, а $y = g(x)$ – вагова функція.

12. Якщо $\forall\, x \in [a; b],\ a < b$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx.$

Заміна змінної та інтегрування по частинах у визначеному інтегралі

Нехай необхідно обчислити інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ функція. При необхідності переходу до нової змінної інтегрування – t, здійснюємо заміну – $x = \varphi(t)$. Тоді: $a = \varphi(\alpha);\ b = \varphi(\beta)$, крім того, при зміні t від α до β значення функції $\varphi(t)$ не виходять за межі відрізку $[a; b]$. Припустимо, що функція $\varphi(t)$ безперервно диференційована на проміжку $[a; b]$, тоді справедлива наступна *формула заміни змінної*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot \varphi'(t)dt .$$

Приклад 6. Обчислити: $\int\limits_2^3 \sqrt{4x - x^2 - 3}\, dx..$

Розв'язання. Перетворимо підкореневий вираз, виділивши повний квадрат: $4x - x^2 - 3 = 1 - \left(x^2 - 4x + 4\right) = 1 - (x-2)^2$. Введемо нову змінну: $x - 2 = \sin t,$ тоді $x = 2 + \sin t$, $dx = d(2 + \sin t)$, тобто $dx = (2 + \sin t)' dt = \cos t\, dt.$ Знайдемо границі інтегрування нової змінної t: якщо $x_1 = 2$, то $\sin t = 0 \ \Rightarrow\ t_1 = 0$; якщо $x_2 = 3$, то $\sin t = 1 \ \Rightarrow\ t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Відтак, згідно формули заміни змінної у визначеному інтегралі, отримуємо:

$$\int_2^3 \sqrt{4x - x^2 - 3}dx = \int_2^3 \sqrt{1-(x-2)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\sin 0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Відмітимо, що в даному випадку, на відміну від аналогічного методу для обчислення невизначеного інтеграла, при застосуванні формули заміни змінної відпадає необхідність повернення до старої змінної « x ». Це цілком зрозуміло, оскільки визначений інтеграл є деяким постійним числом, в той час як невизначений інтеграл від тієї ж самої функції – це деяка функція.

Часто замість заміни змінної $x = \varphi(t)$ застосовують обернену заміну змінної $t = g(x)$.

Приклад 7. Обчислити визначений інтеграл: $\int_1^e \frac{dx}{x(5+\ln x)}$.

Розв'язання. Нехай $t = \ln x$, тоді $\frac{1}{x}dx = d(\ln x) = dt$. Якщо $x_1 = 1$, то $t_1 = \ln 1 = 0$, якщо $x_2 = e$, то $t_2 = \ln e = 1$.

Отже,

$$\int_1^e \frac{dx}{x(5+\ln x)} = \int_1^e \frac{d(\ln x)}{5+\ln x} = \int_0^1 \frac{dt}{5+t} = \ln|t+5|\Big|_0^1 = \ln 6 - \ln 5 = \ln\frac{6}{5} = \ln 1{,}2.$$

Приклад 8. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$.

Розв'язання. $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx =$

$$= \left| \begin{array}{c} \sqrt{1+x} = t, x = t^2 - 1, \\ dx = 2tdt, \\ \text{якщо } x = 0, \text{ то } t = 1, \\ \text{якщо } x = 3, \text{ то } t = 2 \\ \text{на проміжку строгої} \\ \text{монотонності} \end{array} \right| = \int_1^2 \left(t^2 - 1\right) \cdot t \cdot 2tdt = 2\int_1^2 \left(t^4 - t^2\right) dt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 7\frac{11}{15}.$$

Зауваження. При застосуванні методу заміни змінної у визначеному інтегралі слід пам'ятати про те, що нова функція, що вводиться повинна бути визначена, неперервна і бути диференційованою на відрізку інтегрування. У противному випадку формальне застосування формули стає неможливим.

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – неперервні функції разом зі своїми першими похідними на проміжку $[a; b]$, тоді справедливою є формула *інтегрування по частинах*: $\int_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$

Приклад 9. Обчислити визначений інтеграл: $\int_1^2 x^2 \ln x dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу інтегрування по частинах:

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} \int_1^2 udv = u \cdot v\Big|_1^2 - \int_1^2 vdu;\ u = \ln x; \\ du = \frac{1}{x}dx;\ dv = x^2 dx;\ v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left(\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \ln 1\right) - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2 dx = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \left(\frac{1}{9} \cdot 8 - \frac{1}{9} \cdot 1\right) = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}.$$

Приклад 10. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx$.

Розв'язання. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} udv = u \cdot v\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} vdu;\ u = x;\ du = dx; \\ dv = \cos x \cdot dx;\ v = \int dv = \int \cos x \cdot dx = \sin x \end{array} \right| =$

$$= \left(x\cdot\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1.$$

Приклад 11. Обчислити зворотний визначений інтеграл: $\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 3x\,dx$.

Розв'язання. Нехай $I = \int_0^{\pi} e^{2x}\cos 3x\,dx$. Тоді:

$$I = \int_0^{\pi} e^{2x}\cos 3x dx = \left| \begin{array}{ll} \int_0^{\pi} u dv = u\cdot v\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} v du; & \\ u = e^{2x} & du = \left(e^{2x}\right)' dx = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos 3x dx & v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right| = \frac{e^{2x}}{3}\sin 3x\Big|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{2}{3}\int_0^{\pi} e^{2x}\sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{2x};\ \ dv = \sin 3x dx; \\ u = \left(e^{2x}\right)' dx = 2e^{2x}dx \\ v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right| = \frac{2e^{2x}}{9}\cos 3x\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{9}\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 3x dx.$$

Таким чином, знову повертаємось до інтегралу, який необхідно обчислити:

$$I = \frac{2e^{2x}}{9}\cos 3x\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{9}I;\ \ I + \frac{4}{9}I = \frac{2e^{2x}}{9}\cos 3x\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{9}\left(e^{2\pi}\cos 3\pi - e^{0}\cos 0\right) =$$

$$= -\frac{2}{9}\left(e^{2\pi} - 1\right);\ \ \frac{13}{9}I = -\frac{2}{9}\left(e^{2\pi} - 1\right);\ \ \int_0^{\pi} e^{2x}\cos 3x\,dx = -\frac{2}{13}\left(e^{2\pi} + 1\right).$$

Геометричне застосування визначеного інтеграла

Спочатку зупинимось на загальному випадку *застосування визначеного інтегралу до розв'язання фізичних і геометричних задач.*

Нехай потрібно визначити будь-яку геометричну або фізичну величину A (площа фігури, об'єм тіла, тиск рідини на вертикальну пластину та інше), значення якої пов'язане з відрізком $[a; b]$ зміни незалежної змінної x.

Передбачається, що ця величина А – адитивна, тобто така, що при розбитті відрізка $[a;b]$ точкою $c \in [a;b]$ на частини $[a;c]$ і $[c;b]$ значення величини A, що відповідає всьому відрізку $[a;b]$, дорівнює сумі її значень на $[a;\, c]$ і $[c;\, b]$. Для знаходження цієї величини A можна керуватися одним з двох методів:

I – метод інтегральних сум та II – метод диференціала.

Перший метод базується на визначенні визначеного інтеграла.

1. Точками $x_0 = a$, x_1, ... , $x_n = b$ необхідно розбити відрізок $[a;\, b]$ на n частин. Відповідно до цього, що величина A розіб'ється на n «елементарних доданків» $\Delta A_i (i = 1, ..., n)$, тобто: $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + ... + \Delta A_n$.

2. Надати кожний «елементарний доданок» у вигляді добутку деякої функції згідно умови задачі, обчисленої в довільній точці відповідного відрізка, на його довжину: $\Delta A_i \approx f(c_i) \cdot \Delta x_i \;\; (i = 1,\; ...,\; n)$.

Зауважимо, що при знаходженні наближеного значення ΔA_i допустимі деякі спрощення, а саме: дугу на малій ділянці можна замінити хордою, що стягує її кінці; змінну швидкість на малій ділянці можна наближено вважати постійною та інші.

Отже, отримуємо наближене значення величини A у вигляді інтегральної суми: $A \approx f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + ... + f(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

3. Шукана величина A дорівнює границі інтегральної суми, тобто: $A = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i = \int\limits_a^b f(x) dx$.

Зазначений «метод інтегральних сум», заснований на представленні інтеграла як суми нескінченно великого числа нескінченно малих доданків.

Другий метод представляє собою декілька видозмінену схему першого методу і називається «метод диференціала» або «метод відкидання нескінченно малих вищих порядків».

1. На відрізку $[a;b]$ вибираємо довільне значення x і розглядаємо змінний відрізок $[a;x]$. На цьому відрізку величина A стає функцією x: $A = A(x)$, тобто вважаємо, що частина шуканої величини A є невідома функція $A(x)$, де $x \in [a;b]$ – один з параметрів величини A.

2. Знаходимо головну частину приросту ΔA при зміні x на досить малу величину $\Delta x = dx$, тобто знаходимо диференціал dA функції $A = A(x)$: $dA = A(x) \cdot dx$, де $f(x)$, яка визначається в умові задачі, функція змінної x (тут також можливі різні спрощення).

3. Вважаючи, що $dA \approx \Delta A$ при $\Delta x \to 0$, знаходимо шукану величину шляхом інтегрування ΔA в межах від a до b: $A = \int\limits_a^b f(x)dx.$

Обчислення площі плоскої фігури

1. Розглянемо задачу про визначення площі криволінійної трапеції $ABCD$ (рис. 2). Ця фігура обмежена: зверху кривою BC, що є графіком функції $y = f(x)$, де $f(x)$ – додатна та безперервна на відрізку $[a;b]$ функція, знизу – відрізком AD, що належить вісі Ox, з лівого та правого боків – двома ординатами AB і CD, кожна з яких може звестися до точки.

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n частин такими точками:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_n = b$.

Позначимо через m_i і M_i відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на k – ому відрізку $[x_k;\ x_{k+1}]$ $(k = 0,1,\ ...,\ n-1)$ і складемо суми Дарбу: нижню – $\overline{\overline{s}} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \cdot x_k$ і верхню – $\overline{\overline{S}} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \cdot x_k$. Вони являють собою площі східчастих фігур, складених відповідно з прямокутників, що знаходяться на рис. 1 виключно під кривою (заштриховані) або над нею (прозорі). Тому $\overline{\overline{s}} < S < \overline{\overline{S}}$. Але при прагненні до нуля $\lambda = \max\limits_k \{\Delta x_k\}$ обидві суми мають своєю границею інтеграл $\int\limits_b^a f(x)dx$. Отже, шукана площа дорівнює $S = \int\limits_b^a f(x)dx$.

2. Якщо криволінійна трапеція *CDEF* (рис. 3) обмежена і зверху, і знизу графіками деяких функцій, рівняннями яких є: $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$ $(a \le x \le b)$, тобто фігура знаходиться між прямими $x = a$ і $x = b$ за умови, що $f_2(x) \ge f_1(x)$, то, розглядаючи невідому площу трапеції як різницю площ двох плоских фігур *ABEF* і *ABCD*, виразимо її у вигляді: $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$.

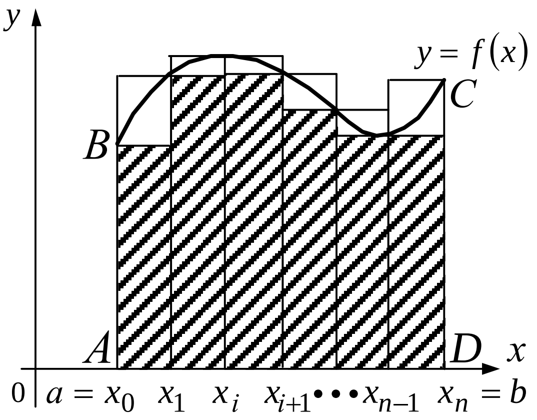


Рис. 2 Прямокутники відповідно відповідно до сум Дарбу

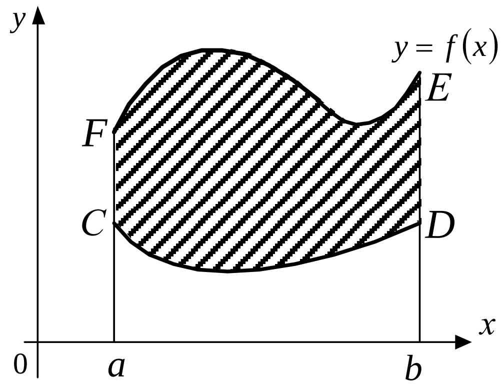


Рис. 3 Загальний випадок вигляду криволінійної трапеції

3. Якщо $f(x) \le 0$ на $[a; b]$, то згідно властивості 7, визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx \le 0$. За абсолютною величиною він дорівнює площі S, яка відповідає криволінійній трапеції: $-S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ кінцеве число разів змінює знак, то інтеграл по всьому відрізку $[a; b]$ розбиваємо на суму інтегралів по частинних відрізках. Значення визначеного інтеграла буде додатнім на тих відрізках, де $f(x) \geq 0$ та негативним – там, де $f(x) \leq 0$. Величина інтегралу по всьому відрізку надасть різницю площ, які лежать вище та нижче осі Ox.

Для того, щоб отримати реально існуючу суму площ, необхідно знайти суму абсолютних значень інтегралів на вищевказаних відрізках або обчислити інтеграл $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Приклад 12. Фермер здійснює обробку поля гербіцидами з використанням літака сільськогосподарської авіації (рис. 4). Траєкторія польоту підпорядковується рівнянню $y = f(x)$. Вважаємо, що рух літака проектується на певну ось (тобто завдано курс польоту – вісь $0x$). Засіб хімічного знищення бур’янів починає розпилюватися у момент, коли $x_0 = a$, а закінчує – у момент $x_k = b$. Фермеру необхідно знати площу, яку займає хімічна речовина при падінні (тобто площу криволінійної трапеції, що утворюється під лінією траєкторії польоту) для подальшого обчислення оптимізації затрат по обробці поля від шкідливих рослин.

Розв’язання. Схематично фігуру, що утворюється під кривою траєкторії польоту, тобто криволінійну трапецію $ABCD$, зображено на рис. 5. Розіб’ємо відрізок $[a;\, b]$ на певні маленькі відрізки і обчислимо площу кожного утвореного внаслідок цього прямокутника. Відрізок $[a;\, b]$ розбивається на n рівних частин точками: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Отже, $x = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$ – довжина кожного з дрібних відрізків.

Особливість розбиття: якщо $x \to 0$, то $n \to \infty$, і навпаки – якщо $n \to \infty$, то $x \to 0$. Відрізок можна розбити на будь-яку кількість частин. Далі виконуємо наступні дії.

Перша дія: розбиття відрізка на n рівних частин.

Друга дія: зафіксуємо n і наближено знайдемо площу криволінійної трапеції S_{ABCD}.

Для побудови прямокутників, у якості значення функції на відрізку $[x_0; x_1]$ приймемо мінімальне значення функції на цьому відрізку; аналогічно вчинимо і для всіх інших відрізків, а саме: значення функції на k-ому відрізку замінимо мінімальним значенням функції на k-ому кінці.

Таким чином, отримуємо прямокутники з однаковою основою і висотою, що дорівнює мінімальному значенню функції (рис. 5).

Рис. 4 Сучасний літак сільгоспавіації

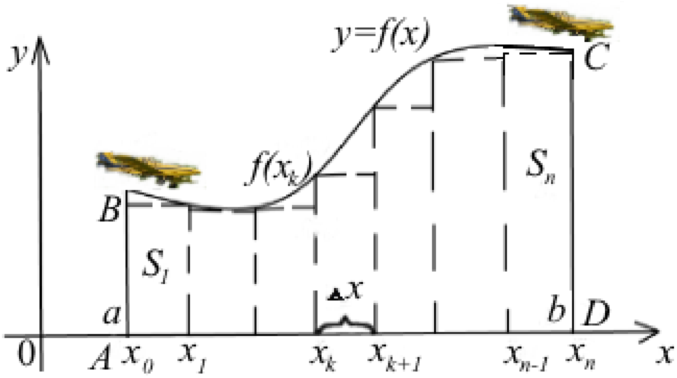


Рис. 5 Криволінійна трапеція під графіком траєкторії польоту

Площі прямокутників розраховуються за формулами:

$S_1 = x \cdot f(x_0)$; $S_2 = x \cdot f(x_1)$; … ; $S_n = x \cdot f(x_{n-1})$.

Відтак, площу криволінійної трапеції розбито на окремі прямокутники і обчислено площу кожного прямокутника. Знайдемо суму цих площ:

$S_n = \dfrac{b-a}{n} \cdot \left(f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}) \right)$. Отже, маємо наближене значення площі при фіксованому n. Щоб отримати максимально точне значення, нам необхідно спрямувати n до нескінченності. Тоді ламана буде прагнути зайняти положення $y = f(x)$ і $S_n \to S$. Таким чином,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx.$$

Відтак, за допомогою визначеного інтеграла обчислено шукану площу.

Відповідь: $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Приклад 13. Обчислити площу фігури, обмеженою синусоїдою $y=\sin x$ і віссю Ox, при $0\le x\le 2\pi$ (рис. 6).

Розв'язання. Оскільки $\sin x\ge 0$, якщо $0\le x\le\pi$ та $\sin x\le 0$ при $\pi\le x\le 2\pi$, то $S=\int\limits_0^{\pi}\sin xdx+\left|\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin xdx\right|$; $\int\limits_0^{\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2$;

$\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=-1-1=-2$. Відтак, $S=2+|-2|=4$.

Відповідь: 4 од. площі.

Приклад 14. Знайти площу плоскої фігури, що міститься між параболою $x^2=4y$ і завитком Ан'єзі $y=\dfrac{8}{x^2+4}$.

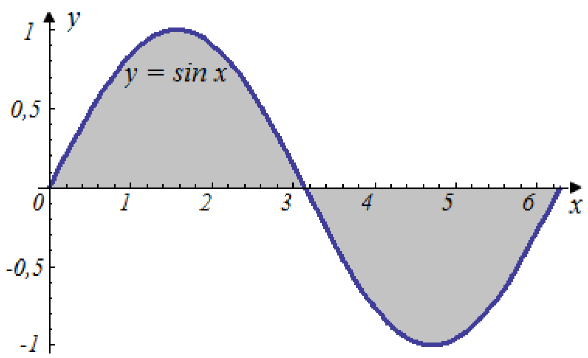


Рис. 6 Синусоїда

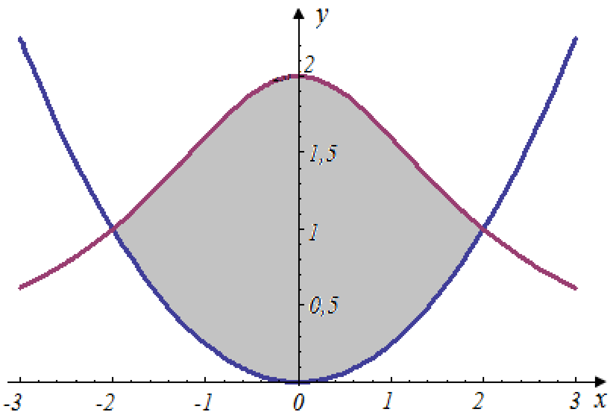


Рис. 7 Завиток Ан'єзі та парабола

Розв'язання. Знайдемо точки перетину кривих $y=\dfrac{8}{x^2+4}$ і $y=\dfrac{x^2}{4}$.

Отже, маємо: $\dfrac{8}{x^2+4}=\dfrac{x^2}{4}$ або $x^4+4x^2-32=0$. Дійсними коренями цього рівняння є $x_1=-2$ та $x_2=2$. З рис. 7 видно, що $\dfrac{8}{x^2+4}\ge\dfrac{x^2}{4}$ на відрізку $[-2;\,2]$.

Тоді, $S=\int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{8}{x^2+4}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(4\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=2\pi-\frac{4}{3}$.

Відповідь: $2\pi-\frac{4}{3}$ (од. площі).

Приклад 15. Обчислити площу фігури, що міститься між прямими $x=0$, $x=2$ і кривими $y=2^x$, $y=2x-x^2$ (рис. 8).

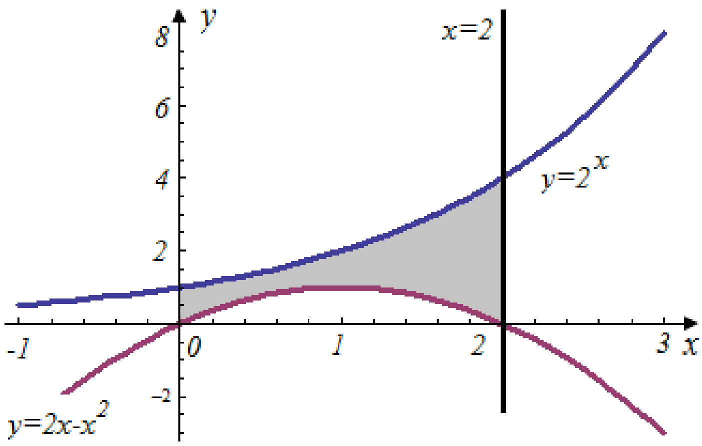


Рис. 8 Обмежена область до прикладу 15

Розв'язання. Оскільки максимуму функція $y=2x-x^2$ досягає у точці $x=1$ і при цьому дорівнює: 1, а функція $y=2^x\geq 1$ на відрізку $[0;2]$, то за формулою обчислення площі криволінійної трапеції у декартових координатах, отримуємо:

$$S=\int\limits_{0}^{2}\left(2^x-\left(2x-x^2\right)\right)dx=\frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_0^2-\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}$ (од. площі).

Приклад 16. Знайти площу між параболою $y=-x^2-2x+3$, дотичної до неї в точці $M(2;-5)$ і віссю ординат.

Розв'язання. Рівняння дотичної у точці $M(2;-5)$ має вигляд: $y+5=-6(x-2)$ або $y=7-6x$. Оскільки вітки параболи спрямовані донизу, то парабола лежить під дотичною (рис. 9), тобто $7-6x \geq -x^2-2x+3$ на відрізку $[0;\,2]$. Отже $S=\int\limits_0^2\left(7-6x-\left(-x^2-2x+3\right)\right)dx=\int\limits_0^2\left(x^2-4x+4\right)dx=\frac{8}{3}$.

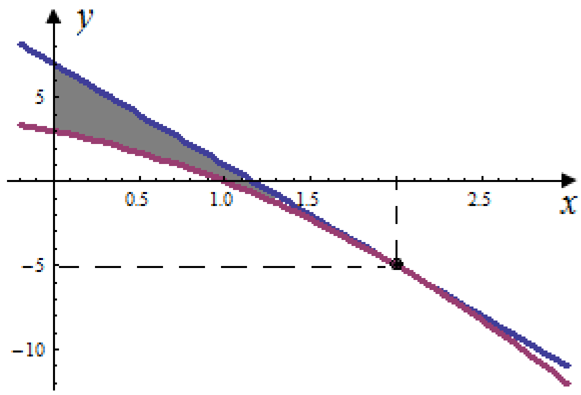


Рис. 9 Обмежена плоска область до прикладу 16

Відповідь: $\approx 2{,}67$ од. площі.

У *полярних координатах* розташування точки $M(\varphi,\rho)$ на площині визначається двома координатами: полярним радіусом $\rho\,(\rho \geq 0)$ і полярним кутом φ. Зв'язок між декартовими координатами $(x;\,y)$ і полярними (φ,ρ) здійснюється за формулою: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$, де $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

Площа криволінійного сектора, обмеженого кривою, заданою в полярній системі координат неперервною функцією $\rho=\rho(\varphi)$ і променями $\varphi_1=\alpha$ та $\varphi_2=\beta$ (рис. 10), обчислюється за формулою $S=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$.

Зауваження. Якщо необхідно обчислити площу фігури, обмеженої замкнутою лінією, при розташуванні полюсу усередині фігури, то, очевидно що: $S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\rho^2(\varphi)\cdot d\varphi$.

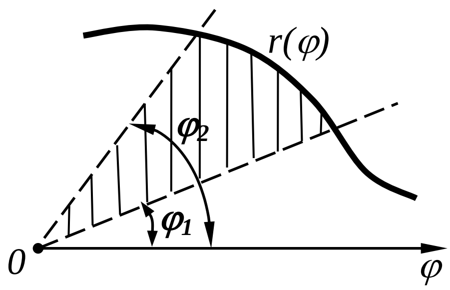


Рис. 10 Площа криволінійного сектора

Приклад 17. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = 3(1+\cos\varphi)$ (рис. 11).

Розв'язання. $S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} 9(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = 9\int\limits_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$

$$= 9\left(\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = 3^2\frac{3}{2}\pi = 13{,}5\pi .$$

Відповідь: $13{,}5\pi$ од. площі.

Приклад 18. Обчислити площу фігури, обмежену двома колами $\rho = 3\sqrt{2}a\cos\varphi$ та $\rho = 3a\sin\varphi$. Розв'язати задачу у загальному вигляді: відповідь надати для $a = 10$.

Розв'язання. Два кола перетинаються в точках A і B, координати яких є розв'язком системи $\begin{cases}\rho = 3\sqrt{2}a\cos\varphi \\ \rho = 3a\sin\varphi\end{cases} \to\ O(0;0),\ B\left(\mathrm{arctg}\sqrt{2};\, a\sqrt{6}\right)$.

На рис. 12 показано, що шукана площа складається з площ двох сегментів $OABO$ та $OCBO$. При цьому дуга BAO задається кінцем полярного радіусу першого кола, коли $\mathrm{arctg}\sqrt{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, а дуга OCB описується кінцем полярного радіусу другого кола, коли $0 \le \varphi \le \mathrm{arctg}\sqrt{2}$.

Тому: $S_{OABO} = 9a^2 \int\limits_{\mathrm{arctg}\sqrt{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{9}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right),$

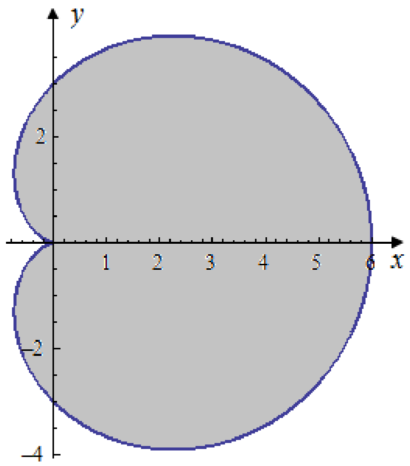


Рис. 11 Кардіоїда

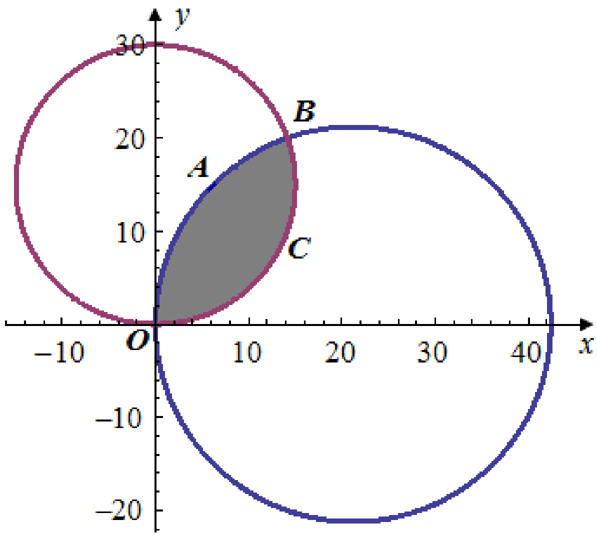


Рис. 12 Перетин двох кіл

$S_{OCBO} = \frac{9}{2}a^2 \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{9}{4}a^2 \left(\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$. Отже,

$S_{фігури} = S_{OABO} + S_{OCBO} = 2{,}25a^2 \left(\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \sqrt{2} \right)$.

$S_{фігури} = 225\left(\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \sqrt{2} \right) \approx 173{,}714$.

Відповідь: $\approx 173{,}714$ од. площі.

Приклад 19. Знайти площу фігури, обмеженою равликом Паскаля $\rho = 2 + \cos\varphi$.

Розв'язання. Щоб знайти границі інтегрування α і β, побудуємо задану криву в полярних координатах. Результати обчислень занесемо в таблицю 1.

Таблиця 1

Побудова равлика Паскаля у полярній системі координат

φ	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
ρ	3	$2+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2,5	2	1,5	$2-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Оскільки функція $cos\varphi$ – парна, то графік функції $\rho = 2+\cos\varphi$ побудуємо симетрично відносно горизонтальної осі для значень кутів з проміжку $\varphi \in \left(180^\circ; 360^\circ\right]$. Для побудови графіка функції при $\varphi \in \left[0; 180^\circ\right)$ проводимо полярну вісь – ρ; на променях, що утворюють з віссю ρ кути, значення яких вказано в таблиці 1, відкладаємо відповідну відстань, потім точки послідовно з'єднуємо. Отримуємо замкнуту криву, яка називається равликом Паскаля (рис. 13).

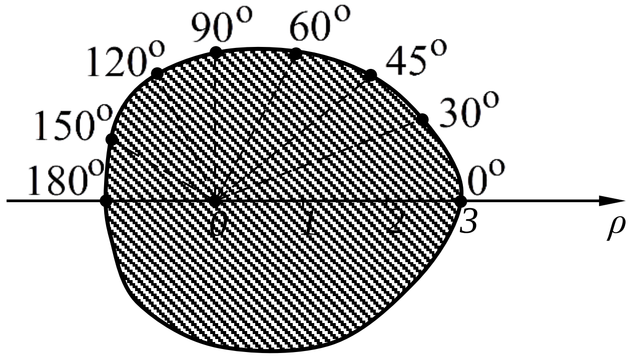


Рис. 13 Побудова равлика Паскаля у полярній системі

Площа плоскої фігури, обмеженої равликом Паскаля дорівнює:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4+4\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4{,}5\varphi + 4\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 4{,}5\pi\ .$$

Відповідь: $4{,}5\pi$ од. площі.

Приклад 20. Обчислити площу фігури, обмеженою полярною віссю та першим витком спіралі Архімеда: $\rho = a\varphi$, де a – додатне число.

Розв'язок. При зміні φ від 0 до 2π полярний радіус описує криву, що обмежує криволінійний сектор *OABC* (рис. 14). Тому за формулою обчислення площі у полярних координатах $S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi$ маємо:

$$S_{OABC}=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi=\left(\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{8\pi^3}{3}=\frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

Відстань від точки С до полюса дорівнює $\rho=2\pi a$. Тому круг з радіусом ОС має площу: $S_{кр}=\pi\cdot OC^2=4\pi^3 a^2=3\cdot\frac{4}{3}\pi^3 a^2=3S_{OABC}$. Відтак, площа фігури, обмежена полярною віссю та першим витком спіралі Архімеда, дорівнює $\frac{1}{3}$ площі круга з радіусом, рівним найбільшому з полярних радіусів витка. До цього ж висновку прийшов свого часу Архімед.

Відповідь: $\frac{4}{3}\pi^3 a^2$ од. площі.

Приклад 21. Знайти площу плоскої фігури, що обмежена тією частиною трипелюсткової рози $\rho=2a\cos 3\varphi$, яка розташована назовні відносно круга $\rho=a$.

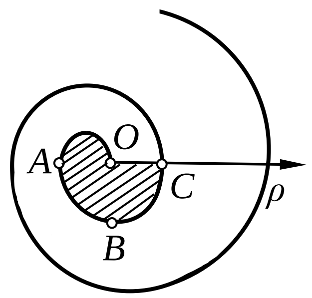


Рис. 14 Спіраль Архімеда

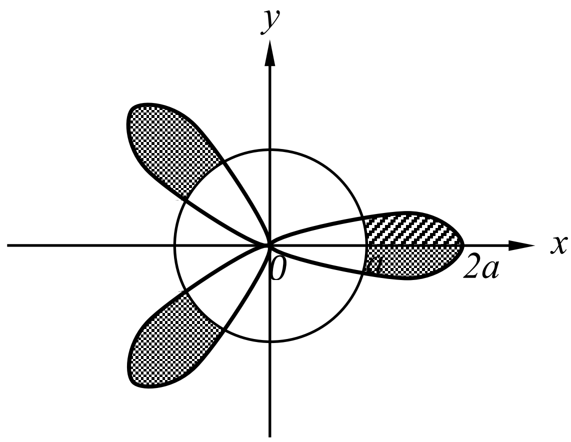


Рис. 15 Трипелюсткова роза

Розв'язання. Позначимо через S площу, яку необхідно обчислити. Враховуючи, що $\rho\geq 0$; $\cos 3\varphi\geq 0$, обчислимо значення кутів, які відповідають осям пелюстків рози. Отже, $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 3\varphi\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$. Тобто, пелюстки мають наступні вісі симетрії:

$\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \dfrac{2\pi}{3}, \varphi_3 = \dfrac{4\pi}{3}$. Оскільки маємо симетрію відносно полярної осі, то знайдемо спочатку $\dfrac{1}{6}$ частину площі, тобто половину площі однієї пелюстки за винятком площі, що відтинає від неї круг з радіусом a. Точки перетину кола та рози визначаємо із системи: $\begin{cases} \rho = 2a\cos 3\varphi, \\ \rho = 2a. \end{cases}$ Отже, $\cos 3\varphi = \dfrac{1}{2}$ $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}$. Площу половини пелюстки $\left(S_{0,5\,пел.}\right)$ обчислюємо за формулою: $S_{0,5\,пел.} = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi$.

Отже, $S_{0,5\,пел.} = \dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/9} 4a^2 \cdot \cos^2 3\varphi \cdot d\varphi = a^2 \int\limits_{0}^{\pi/9} (1+\cos 6\varphi)\cdot d\varphi =$

$$= a^2\left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\pi/9} = a^2\left(\frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{36}\right).$$

Знайдемо далі $S_{сект.}$ – площу сектора круга з радіусом a, що відповідає центральному куту $\dfrac{\pi}{9}$: $S_{сект.} = \dfrac{R^2\varphi}{2} = \dfrac{a^2\pi}{2\cdot 9} = \dfrac{\pi a^2}{18}$. Оскільки $\dfrac{1}{6}S = S_{0,5\,пел.} - S_{сект.}$, то $S = 6\left(\dfrac{\pi a^2}{9} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12} - \dfrac{\pi a^2}{18}\right) = \dfrac{a^2}{6}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$.

Відповідь: $\dfrac{a^2}{6}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$ од. площі.

У разі, якщо криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою параметрично, тобто: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, при $\alpha \le t \le \beta$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox, її площа обчислюється за формулою: $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\cdot x'(t)dt$, де $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ і $y(t) \ge 0$ на відрізку $[\alpha; \beta]$.

Приклад 22. Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$

Розв'язання. Оскільки $|x| \le a$, $|y| \le b$, графік симетричний відносно осі Ox та Oy, обчислимо четверту частину площі (рис. 16).

$$\frac{S}{4} = \int_0^a ydx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin^3 t \cdot \left(-3a\cos^2 t \cdot \sin t\right) \cdot dt = 3ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 tdt =$$

$$= \frac{3}{4}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \cdot \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{3}{4}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}dt - \frac{3}{8\cdot 2}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2td\left(\sin 2t\right) =$$

$$= \frac{3}{8\cdot 2}ab\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{ab}{16}\sin^3 2t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2\cdot 16}\pi ab = \frac{3\pi ab}{32}.$$

Тоді: $S = 4 \cdot \frac{3\pi ab}{32} = \frac{3\pi ab}{8}$.

Відповідь: $0{,}375\pi ab$ од. площі.

Приклад 23. Знайти площу фігури (рис. 17), обмеженої петлею кривої $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t\left(4-t^2\right); \\ y = t^2. \end{cases}$

Розв'язання. Оскільки $y(t)$ – парна, а $x(t)$ – непарна, то $y = y(x)$ – парна, тобто графік даної функції є симетричним відносно осі Oy. Знайдемо границі інтегрування: $x = \frac{1}{2}t\left(4-t^2\right)$, $x = 0$. Звідси: $t_1 = 0 \Rightarrow y = 0$, $t_{2,3} = \pm 2 \Rightarrow y = 4$. З огляду на симетрію обчислимо площу половини фігури, а результат – подвоїмо. Отже:

$$S=2\int_0^4 x(t)\,dy=2\int_0^2\left(2t-\frac{t^3}{2}\right)\cdot 2t\,dt=2\int_0^2\left(4t^2-t^4\right)dt=2\left(\frac{4t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=64\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{128}{15}.$$

Відповідь: $\approx 8{,}533$ од. площі.

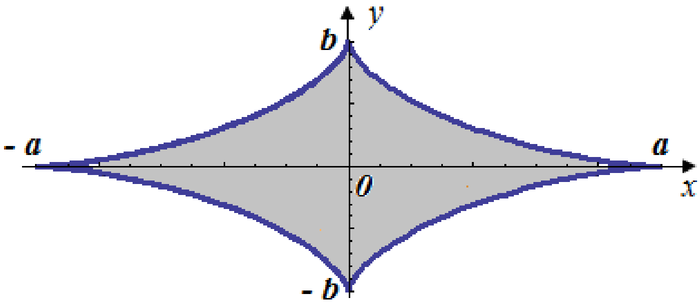


Рис. 16 Астроїда

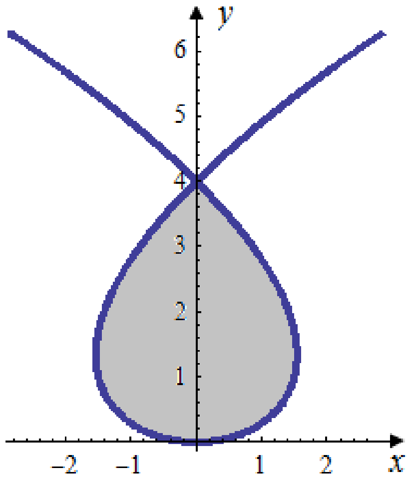


Рис. 17 Петля кривої

Приклад 24. Обчислити площу, яка обмежена еліпсом (рис. 18), заданим у параметричному вигляді: $\begin{cases} x=5\cos t; \\ y=2\sin t. \end{cases}$

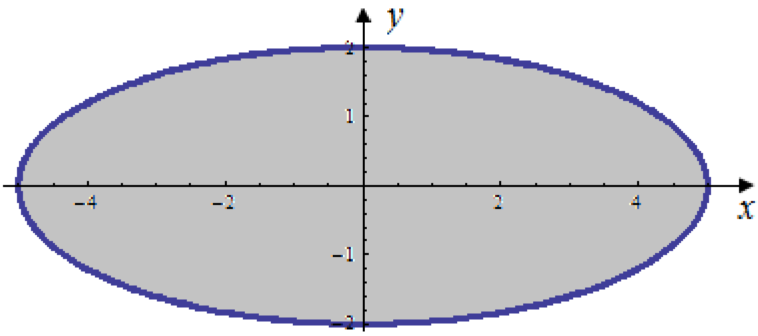


Рис. 18 Еліпс

Розв'язання. Оскільки еліпс є симетричною кривою другого порядку, то достатньо розглянути $\frac{1}{4}$ частину площі, обмеженою відповідно $\frac{1}{4}$ дуги еліпса: $0\le x\le 5 \;\Rightarrow\; x=0 \;\Rightarrow\; t=\frac{\pi}{2},\; x=5 \;\Rightarrow\; t=0.$

Отже, $S=4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}2\sin t\left(-5\sin t\right)dt=40\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=\frac{40}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t\right)dt=$

$$=20\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=20\cdot\frac{\pi}{2}=10\pi.$$

Відповідь: 10π (од. площі).

Обчислення довжини дуги

Якщо плоску криву задано у декартовій системі координат рівнянням $y=f\left(x\right)$, то використовується наступна формула для обчислення довжини дуги: $l=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left[f'\left(x\right)\right]^2}dx$, де, x_1 і x_2 – це абсциси початку та кінця дуги. У разі, якщо криву задано рівнянням $x=g\left(y\right)$, то $l=\int\limits_{y_1}^{y_2}\sqrt{1+\left[g'\left(y\right)\right]^2}dy$, де y_1 і y_2 – це відповідно ординати точок початку та кінця дуги.

Приклад 25. Обчислити довжину дуги ланцюгової лінії $y=\text{ch}\,x$ (рис. 19) на ділянці $\left[0;\ 1\right]$.

Розв'язання. $l=\int\limits_0^1\sqrt{1+\text{sh}^2 x}\,dx=\int\limits_0^1\text{ch}x\,dx=\text{ch}x\Big|_0^1=\text{sh}1=\dfrac{e-\dfrac{1}{e}}{2}=\dfrac{e^2-1}{2e}$.

Відповідь: $\dfrac{e^2-1}{2e}$ (од. довжини).

Якщо гладка крива задана в полярних координатах рівнянням: $\rho=\rho(\varphi)$, та при цьому: $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$, то довжина її дуги дорівнює $l=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left[\rho'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi$.

Приклад 26. Знайти довжину всієї кривої: $\rho = 4\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Розв'язання. Вся крива описується точкою при зміні φ від 0 до 3π (рис. 20).

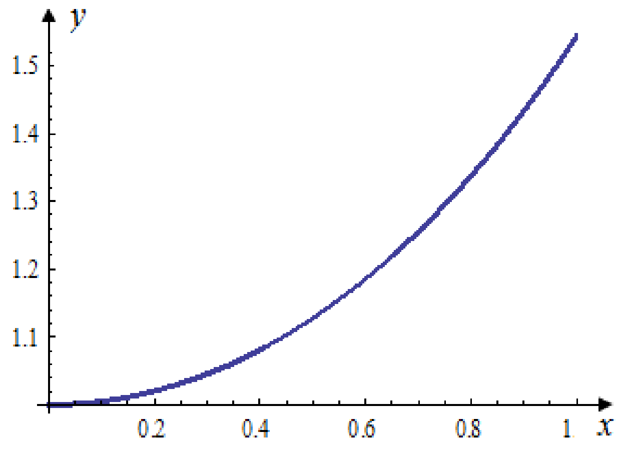


Рис. 19 Дуга ланцюгової лінії

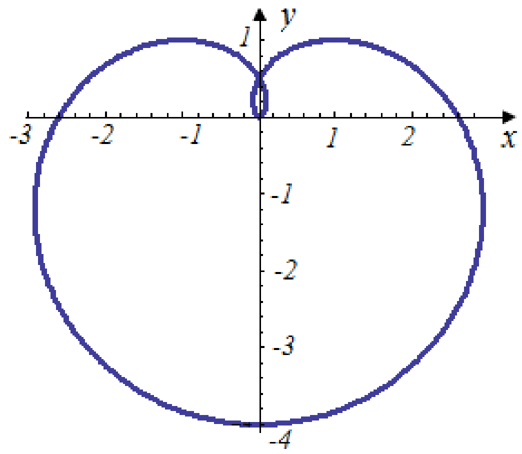


Рис. 20 До прикладу 26

Отже, $\rho' = 4\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}$. Тому довжина всієї дуги кривої становить:

$$l = \int_0^{3\pi}\sqrt{16\sin^6\frac{\varphi}{3} + 16\sin^4\frac{\varphi}{3}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi = 4\int_0^{3\pi}\sqrt{\sin^4\frac{\varphi}{3}\left(\sin^2\frac{\varphi}{3} + \cos^2\frac{\varphi}{3}\right)}\,d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi = 4\int_0^{3\pi}\frac{1-\cos\frac{2\varphi}{3}}{2}\,d\varphi = 2\left(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{3\pi} = 6\pi.$$

Відповідь: 6π (од. довжини).

Якщо криву задано параметричними рівняннями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, то довжина дуги обчислюється за формулою: $l = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$, де t_1 і t_2 – значення параметра, що відповідають кінцевим точкам дуги.

Приклад 27. Знайти довжину астроїди $\begin{cases} x = a\cdot\cos^3 t; \\ y = a\cdot\sin^3 t. \end{cases}$

Розв'язання. Крива симетрична щодо обох координатних осей, тому обчислимо спочатку довжину її четвертої частини, розташованої у першому квадранті. Для кривої, яку задано параметрично, диференціал дуги становить: $dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt$.

Знаходимо: $x' = -3a\cos^2 t \sin t$, $y' = 3a\sin^2 t \cos t$ та суму $(x')^2 + (y')^2 = 9a^2\left(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t\right) = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t$. Для кривої у першому квадранті параметр t змінюється від $t = 0$ до $t = \pi/2$. Відтак,

$$\frac{1}{4}L = 3a\int_0^{\pi/2} \left|\sin t \cos t\right| dt = \left| \begin{array}{l} \text{у першому квадранті :} \\ \left|\sin t \cdot \cos t\right| = \sin t \cdot \cos t \end{array} \right| = 3a\int_0^{\pi/2} \sin t\, d(\sin t) =$$

$$= 3a \left. \frac{\sin^2 t}{2} \right|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}$$. Тоді довжина всієї астроїди: $L = 6a$.

Відповідь: $6a$ (од. довжини).

Знаходження об'єму тіла

Обчислення об'єму тіла, обмеженого деякою поверхнею, за площами паралельних перетинів

Розглянемо тіло довільної форми (рис. 21). Припустимо, що площа будь-якого перетину цього тіла площиною, яка перпендикулярна осі Ox – відома.

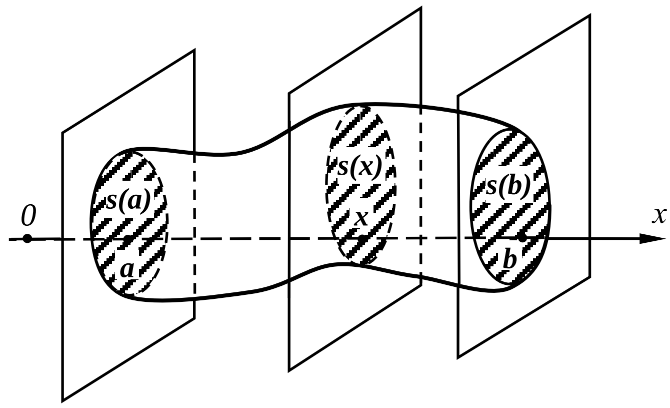
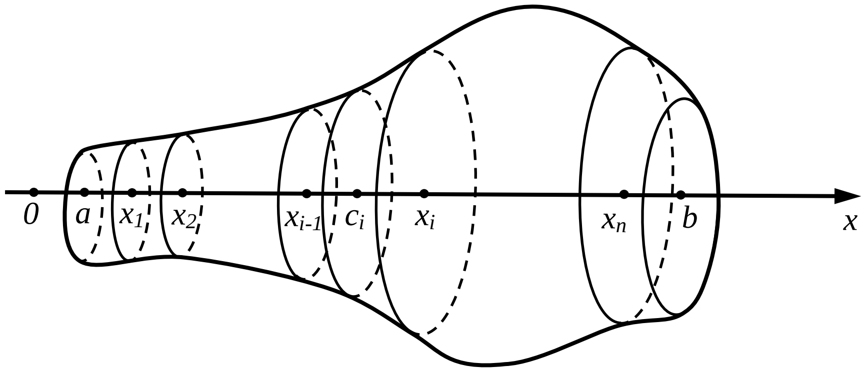
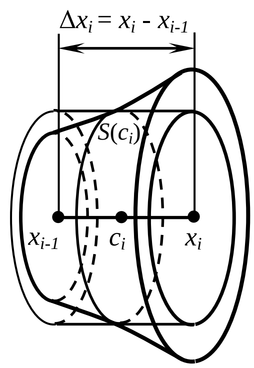


Рис. 21 Поперекові перетини тіла перпендикулярні осі Ox

Площа кожного означеного вище поперекового перетину буде залежати від розташування сектору площини, тобто буде відомою функцією $S = S(x)$. Нехай $x = a$ та $x = b$ – абсциси, що відповідають крайнім перетинам тіла. Обидва ці перетини, або лише один з них, в окремих випадках можуть зводитися до точок. Для визначення об'єму тіла V розіб'ємо сегмент $[a;\ b]$ на n частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ і через точки поділу проведемо площини, перпендикулярні вісі Ox. Ці площини розіб'ють тіло на n прошарків (рис. 22 а).

Позначимо об'єм прошарку, розташованого між площинами, проведеними через точки x_{i-1} та x_i через Δv_i. Тоді $V = \Delta v_1 + \Delta v_2 + ... + \Delta v_n$ або $V = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta v_i$. Розглянемо один з прошарків, утворений перетинами з абсцисами x_{i-1} та x_i (рис. 22 б).





а б

Рис. 22 а) тіло розподілене на n прошарків паралельними площинами;
б) прошарок, між площинами, проведеними через точки x_{i-1} та x_i

Його об'єм Δv_i наближено дорівнює об'єму прямого циліндра, висота якого відповідає довжині відрізка $[x_{i-1};\ x_i]$, тобто $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а основа збігається з поперековим перерізом тіла, що відповідає будь-якій абсцисі c_i, де $x_{i-1} \le c_i \le x_i$ і, відповідно, має площу $s(c_i)$. Об'єм такого циліндра дорівнює, як і об'єм кругового циліндра, добутку площі основи на висоту:

$s(c_i)\cdot\Delta x_i$. Таким чином, $\Delta v_i \approx s(c_i)\cdot\Delta x_i$. Тому для обчислення об'єму цілого тіла отримаємо наступну наближену рівність: $V \approx \sum_{i=1}^{n} s(c_i)\cdot\Delta x_i$. Точність цієї наближеної рівності збільшиться зі зменшенням кроку розбиття λ відрізку $[a;\ b]$. Відтак, точне значення об'єму отримаємо, наближаючи крок розбиття до нуля. Отже, $V = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} s(c_i)\cdot\Delta x_i$. При цьому сума $\sum_{i=1}^{n} s(c_i)\cdot\Delta x_i$ є інтегральною сумою для функції $s(x)$. Тому: $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} s(c_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b s(x)dx$.

Отже, $V = \int_a^b s(x)dx$, де $s(x)$ – площа поперекового перетину; a та b – абсциси крайніх точок перетину тіла.

Примітка. Типи поверхонь другого порядку та їх канонічні рівняння наведено у додатку 3 (стор. 218).

Приклад 28. Визначити об'єм тіла, обмеженого еліпсоїдом, канонічне рівняння якого: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Розв'язання. Перетином еліпсоїда площиною $x = h$ є еліпс: $\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}=1$ з напівосями: $b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$ та $c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$ (рис. 23).

Відтак, площа отриманого перетину становить: $S(h)=\pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)$.

Тому за формулою обчислення об'єму тіла з відомою площею перетину, що залежить від однієї змінної – h, отримуємо:

$$V=\int_{-a}^{a} S(h)\ dh=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)\ dh=\pi bc\left(h-\frac{h^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

У випадку, коли $a=b=c=R$ виходить шар радіусом R, об'єм якого дорівнює $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Приклад 29. Обчислити об'єм тіла, обмеженого еліптичним параболоїдом $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ та площиною $z=H$ (рис. 24).

Розв'язання. Розглянемо перетин тіла площиною, паралельною площині xOy на висоті, що дорівнює – z. Фігура перетину – це еліпс: $\frac{x^2}{\left(a\sqrt{z}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{z}\right)^2}=1$.

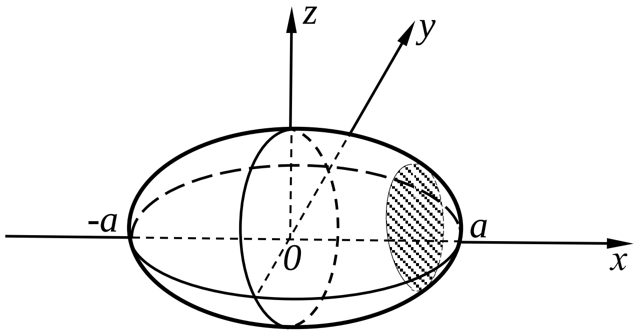


Рис. 23 Еліпсоїд

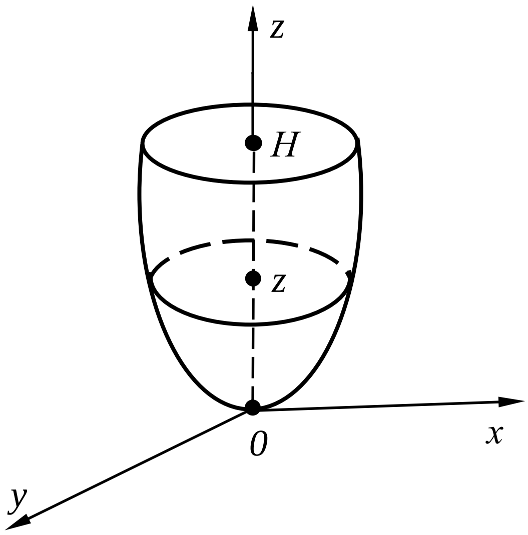


Рис. 24 Еліптичний параболоїд

Площа еліпса, який задано канонічним рівнянням у декартовій системі координат: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ дорівнює $S=\pi ab$. Для отриманого еліпса: $S(z)=\pi\cdot a\sqrt{z}\cdot b\sqrt{z}=\pi abz$. Тоді:

$$V=\int_0^H S(z)dz=\int_0^H \pi abzdz=\pi ab\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^H=0{,}5\pi abH^2.$$

Відповідь: $0{,}5\pi abH^2$ (од. об'єму).

Приклад 30. Знайти об’єм тіла, обмеженого двома циліндрами $x^2 + y^2 = R^2$ та $x^2 + z^2 = R^2$.

Розв’язання. Покажемо восьму частину тіла, розташовану в 1 октані (рис. 25).

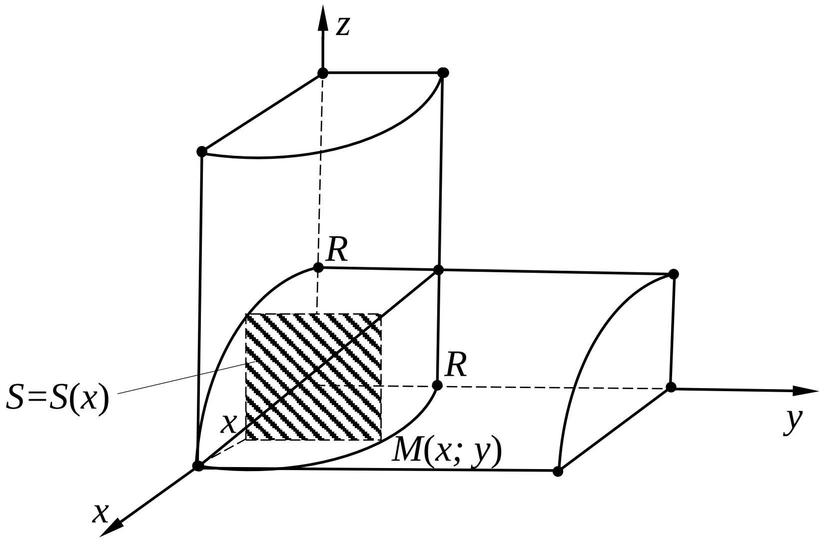


Рис. 25 Тіло утворене через перетин двох циліндрів: I октант

У поперековому перетині тіла (перпендикулярному до осі Ox) отримуємо квадрат. Його сторона a дорівнює ординаті точки $M(x;y)$, розташованій на колі $x^2 + z^2 = R^2$, тобто $a = y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Отже, площа перетину дорівнює $S(x) = \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 = R^2 - x^2,\ 0 \le x \le R.$ При використанні формули обчислення об’єму тіла за площею поперекового перетину, отримуємо: $\frac{1}{8}V = \int\limits_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R = \frac{2}{3}R^3$ Відтак, $V = \frac{16}{3}R^3 = 5\frac{1}{3}R^3.$

Відповідь: $5\frac{1}{3}R^3$ (од. об’єму).

Приклад 31. Дизайнерам фабрики з виготовлення косметики потрібно створити упаковку для нових парфумів. Упаковка має вигляд об'ємного тіла (рис. 26 *а*), в основі якого лежить рівнобедрений трикутник з висотою $h=6$ *см* і основою $a=4$ *см* (рис. 26 *в*). Поперековий переріз тіла є сегментом параболи з хордою, яка дорівнює висоті сегмента (рис. 26 *б*). Необхідно обчислити об'єм тари (рис. 26 *г*), для звіту по технологічній документації.

Розв'язання. За умовою: $|AB|=a$, $|OC|=h$, $|MK|=|DE|$, $|OK|=x$. Отримаємо формулу для обчислення площі поперекового перерізу тіла у загальному вигляді як функцію від x. Для цього попередньо знайдемо рівняння параболи. Довжину хорди DE знайдемо з подібних трикутників ABC і DEC (рис. 26 *в*):

$$\frac{|DE|}{a}=\frac{|KC|}{h};\ \frac{|DE|}{a}=\frac{h-x}{h};\ |DE|=\frac{a(h-x)}{h}=|MK|.$$

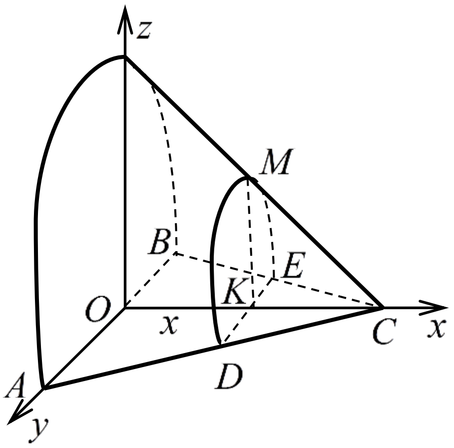
Припустимо, що $|DE|=m$. Знайдемо рівняння параболи в системі координат uOv (рис. 26 *б*). Для цього скористуємося відомими координатами трьох точок: $(u_1;v_1)\to\left(\frac{m}{2};0\right)$; $(u_2;v_2)\to\left(-\frac{m}{2};0\right)$; $(u_3;v_3)\to(0;m)$. Тоді:

$$\begin{cases} v_1=au_1^2+bu_1+c, \\ v_2=au_2^2+bu_2+c, \\ v_3=au_3^2+bu_3+c. \end{cases}\quad \begin{cases} 0=a\dfrac{m^2}{4}+b\dfrac{m}{2}+m, \\ 0=a\dfrac{m^2}{4}-b\dfrac{m}{2}+m, \\ c=m. \end{cases}\quad \begin{cases} 0=a\dfrac{m^2}{4}+0+m, \\ 0=bm, \\ c=m. \end{cases}\quad \begin{cases} a=-\dfrac{4}{m}, \\ b=0, \\ c=m. \end{cases}$$

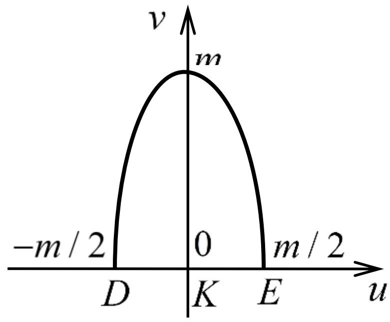
Підставимо знайдені коефіцієнти a, b, c у рівняння параболи: $v=m-\frac{4}{m}\cdot u^2$. Тоді площа поперечного перерізу даного тіла:

$$S=2\int_0^{\frac{m}{2}}\left(m-\frac{4}{m}\cdot u^2\right)du=2\left(mu-\frac{4}{3m}u^3\right)\Bigg|_0^{\frac{m}{2}}=2\left(\frac{m^2}{2}-\frac{m^2}{6}\right)=\frac{2}{3}m^2, \text{ або}$$

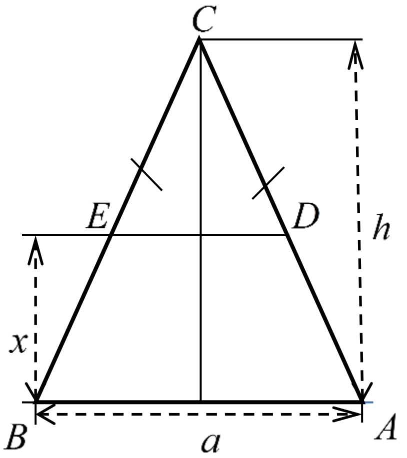
$$S = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2(h-x)^2}{h^2}.$$



а



б



в

г

Рис. 26 Упаковка парфумів: *а*) схематичне зображення; *б*) сегмент параболи у системі координат uOv; *в*) подібні трикутники ABC і DEC: h – висота трикутника ABC, a – основа трикутника ABC, x – незалежна змінювана величина; *г*) зовнішній вигляд упаковки

Відтак, знайдемо об'єм упаковки у загальному випадку, тобто з вільними геометричними параметрами:

$$V=\int_0^h S(x)dx=\int_0^h \frac{2}{3}\cdot\frac{a^2(h-x)^2}{h^2}dx=\left|d(h-x)=-dx\right|=-\frac{2a^2}{3h^2}\int_0^h (h-x)^2 d(h-x)=$$

$$=-\frac{2a^2}{3h^2}\left(\frac{(h-x)^3}{3}\right)\Bigg|_0^h=-\frac{2a^2}{3h^2}\left(\frac{(h-h)^3}{3}-\frac{(h-0)^3}{3}\right)=\frac{2a^2h}{9}\ \text{(од. об'єму).}$$

Підставляючи конкретні значення за умовою задачі, отримуємо:

$$V=\int_0^6 \frac{2}{3}\cdot\frac{4^2\cdot(6-x)^2}{6^2}dx=-\frac{2\cdot 16}{3\cdot 36}\cdot\left(\frac{(6-x)^3}{3}\right)\Bigg|_0^6=\frac{2\cdot 16\cdot 6}{9}\approx 21\ \text{см}^3\ \text{або}\ 210\ \text{мл}.$$

Відповідь: $V=210$ мл.

Приклад 32. Знайти об'єм тіла, обмеженого кількома поверхнями: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$; $z=x\sqrt{3}$; $z=0$ при умові, що $x\geq 0$.

Розв'язання. Виконаємо схематичне креслення тіла, об'єм якого необхідно обчислити. Розглянемо поверхні, що його утворюють (рис. 27).

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$ – канонічне рівняння еліптичного циліндра;

2) $z=x\sqrt{3}$ – неповне рівняння площини: $\sqrt{3}x-z=0$, у якому коефіцієнт при змінній «*y*» та вільний член дорівнюють нулю; отже, така площина проходить через вісь *Oy*;

3) $z=0$ – неповне рівняння площини, у якому всі коефіцієнти окрім як при змінній «*z*» та вільний член дорівнюють нулю; отже, така площина співпадає з координатною площиною *xOy*;

4) $x\geq 0$ – частина простору, у якій абсциси усіх точок додатні.

Оскільки заштрихований переріз тіла – це прямокутник, то його площа обчислюється за формулою: $S=z\cdot y$. Знайдемо геометричні параметри прямокутника, що входять до формули обчислення його площі, в залежності від координати *x*, тобто $S=z(x)\cdot y(x)$. Отже: $z(x)=x\cdot\sqrt{3}$;

$$\frac{y^2}{3}=1-\frac{x^2}{16}\ ;\ y^2=\frac{3\left(16-x^2\right)}{16}\ ;\ \ y\left(x\right)=\frac{\sqrt{3}\sqrt{16-x^2}}{4}.$$

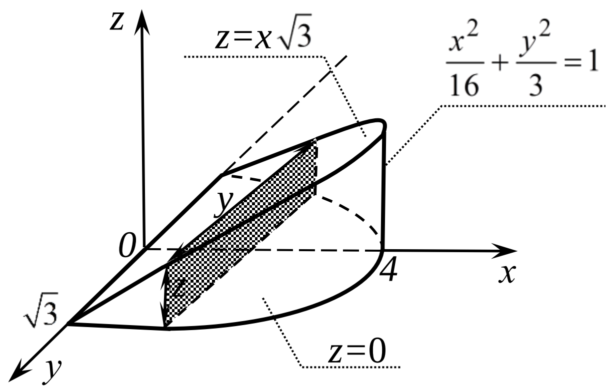


Рис. 27 Прямокутник, який є паралельним перетином тіла: до прикладу 32

Відтак, $S\left(x\right)=x\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{16-x^2}}{4}\cdot 2=\frac{3}{2}x\sqrt{16-x^2}$. Тоді шуканий об'єм становить: $V=\int\limits_0^4 S\left(x\right)dx=\int\limits_0^4\frac{3}{2}x\cdot\sqrt{16-x^2}\,dx=\left|d\left(16-x^2\right)=-2xdx\right|=$

$$=-\frac{3}{4}\int\limits_0^4\left(16-x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(16-x^2\right)=-\frac{3}{4}\cdot\left.\frac{2\left(16-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^4==-\frac{1}{2}\left.\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}\right|_0^4=32.$$

Відповідь: 32 (кубічних одиниць).

Об'єм тіла обертання

Розглянемо тіло, отримане в результаті обертання криволінійної трапеції навколо осі Ox (рис. 28). Нехай основою цієї трапеції є відрізок $\left[x_1;\,x_2\right]$, розташований на осі Ox, і вона обмежена безперервною кривою $y=f(x)$. У цьому випадку в будь-якому перетині отриманого тіла площиною, перпендикулярною Ox буде коло, радіус якого співпадає зі значенням функції $f(x)$ у даній конкретній точці. Тому площа буде дорівнювати: $S(x) = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2$.

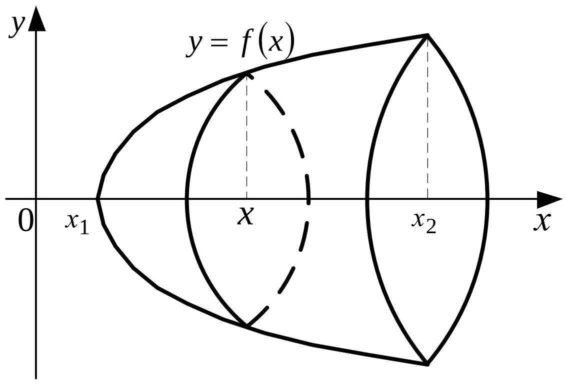


Рис. 28 Обертання криволінійної трапеції навколо осі *Ox*

Якщо підставити цей вираз у формулу для обчислення об'єму тіла з відомими площами поперекових перетинів, наведену вище, то отримаємо: $V = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$.

Якщо трапеція обертається навколо осі Oy, то повинна бути задана функція $x = f(y)$ на відрізку $[y_1;\ y_2]$. У цьому випадку об'єм тіла буде дорівнювати: $V_{oy} = \pi \int_{y_1}^{y_2} [f(y)]^2 dy = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy$.

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої кривими $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$ у випадку, якщо $f_2(x) \geq f_1(x)$, і прямими $x = x_1,\ x = x_2,\ x_1 < x_2$, дорівнює різниці об'ємів, отриманих від обертання навколо осі *Ox* криволінійних трапецій, обмежених лініями: $y_2 = f_2(x)$, $x = x_1, x = x_2$ та частиною осі *Ox* – $x_1 \leq x \leq x_2$ і $y_1 = f_1(x)$, $x = x_1, x = x_2$ та частиною осі *Ox* – $x_1 \leq x \leq x_2$. Отже, $V_{ox} = \pi \int_{x_1}^{x_2} \left[f_2^2(x) - f_1^2(x) \right] dx$.

Якщо криву задано в параметричній формі, то об’єм тіла обертання навколо осі Ox обчислюється за формулою: $V_{ox}=\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} y^2(t)\cdot x'(t)dt$, де $x=x(t)$ та $y=y(t)$ – це параметричні рівняння кривої, що обмежує плоску фігуру зверху; при $x'_t>0$ при $t\in[t_1;t_2]$; фігура є криволінійною трапецією з основою-відрізком $\left[x_1;x_2\right]$ осі Ox, $x_1=x(t_1),\ x_2=x(t_2)$.

У разі обертання плоскої фігури навколо осі Oy з обмеженням її двома заданими кривими, маємо наступну формулу для обчислення об’єму: $V_{oy}=\pi\int\limits_{y_1}^{y_2}\left[{x_2}^2(y)-{x_1}^2(y)\right]\cdot dy$, де $x=x_1(y),\ x=x_2(y)$ – лінії, що обмежують плоску фігуру зліва та справа, $0\le x_1(y)\le x_2(y)$, а зверху та знизу при $y_1\le y\le y_2$ фігуру обмежено відповідно лініями – $y=y_1,\ y=y_2$.

Якщо криву задано в параметричній формі, то об’єм тіла обертання навколо осі Oy обчислюється за формулою: $V_{oy}=\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} x^2(t)\cdot y'(t)dt$, де $x=x(t)$ та $y=y(t)$ – параметричні рівняння кривої, що обмежує плоску фігуру праворуч, $y'_t>0$, при $t\in[t_1;t_2]$; фігура є криволінійною трапецією з основою-відрізком $\left[y_1;y_2\right]$ осі Oy, $y_1=y(t_1),\ y_2=y(t_2)$.

Приклад 33. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями: $y=\sqrt{x},\ x=4,\ y=0.$

Розв’язання. Побудуємо обмежувальні лінії: $y=\sqrt{x}$ – гілка параболи, розташована вище осі Ox, тому що $x\ge0$; $x=4$ – пряма, що паралельна осі Oy; $y=0$ – вісь Ox.

При обертанні криволінійної трапеції (рис. 29) навколо осі утворюється тіло обертання. Оскільки за умовою криволінійна трапеція обертається навколо осі Ox, то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою $V_{ox} = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$. За умовою $y = \sqrt{x}$, отже, $f(x) = \sqrt{x}$ тоді $f^2(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.

При цьому $0 \le x \le 4$, отже $a = 0,\ \ b = 4$.

Відтак, $V_{ox} = \pi\int\limits_0^4 xdx = \pi\cdot\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^4 = \dfrac{\pi}{2}\left(4^2 - 0\right) = 8\pi$.

Відповідь: 8π (од. об'єму).

Приклад 34. Параболічний сегмент з основою – $2a$ та заввишки – h обертається навколо основи. Знайти об'єм отриманого тіла (лимон Кавальєрі).

Розв'язання. Розташуємо параболічний сегмент так, як показано на рис. 30. Парабола $y = h - kx^2$ обмежує сегмент зверху. Параметр k знайдемо з умови, що $y = 0$ при $x = a$; отримуємо $k = \dfrac{h}{a^2}$. Відповідно, парабола має рівняння $y = h\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$. Оскільки лимон Кавальєрі – симетричне тіло, знайдемо об'єм лише тієї частини, що знаходиться праворуч, а результат подвоїмо.

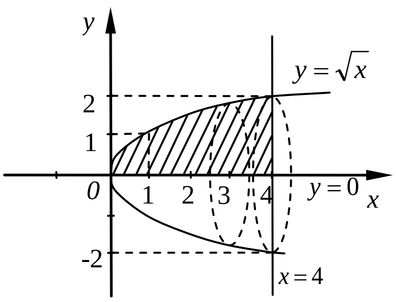


Рис. 29 До прикладу 33

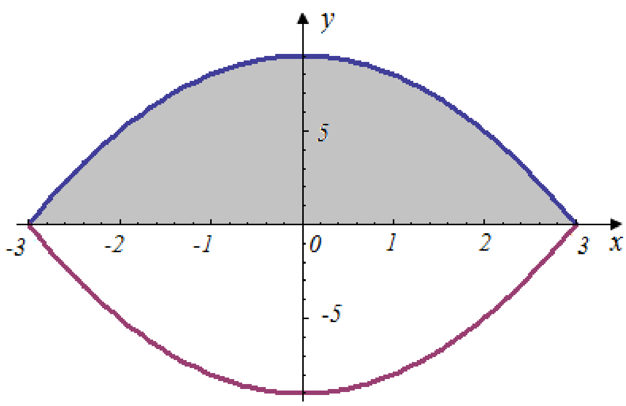


Рис. 30 Перетин лимону Кавальєрі: $h = 9;\ a = 3$

Отже, згідно з формулою обчислення об'єму тіла, утвореного шляхом обертання плоскої фігури навколо осі Ox отримуємо:

$$V_{ox}=2\pi\int_0^a h\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2 dx=2\pi h^2\left(\int_0^a dx-\frac{2}{a^2}\int_0^a x^2dx+\frac{1}{a^4}\int_0^a x^4dx\right)=$$

$$=2\pi h^2\left(x\Big|_0^a-\frac{2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^a+\frac{1}{a^4}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^a\right)=2\pi h^2\left(a-\frac{2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}+\frac{1}{a^4}\cdot\frac{a^5}{5}\right)=\frac{16}{15}\pi a h^2.$$

Відповідь: $\frac{16}{15}\pi a h^2$ (од. об'єму).

Приклад 35. На кондитерську фабрику надходять бочки з медом (рис. 31) об'ємом $3\,\text{дм}^3$ та $5\,\text{дм}^3$. Однак одного разу на підприємство привезли бочку невідомого об'єму. Треба обчислити об'єм бочки за наданими розмірами перетину бочки площиною, яка є паралельною дну (рис. 32), де верхня і нижня обмежуючі криві − це параболи. Розв'язати спочатку задачу у загальному вигляді, а потім знайти об'єм при наступних значеннях параметрів: $R=1\,\text{м}$, $r=0{,}75\,\text{м}$, $l=0{,}5\,\text{м}$.

Рис. 31 Бочка меду

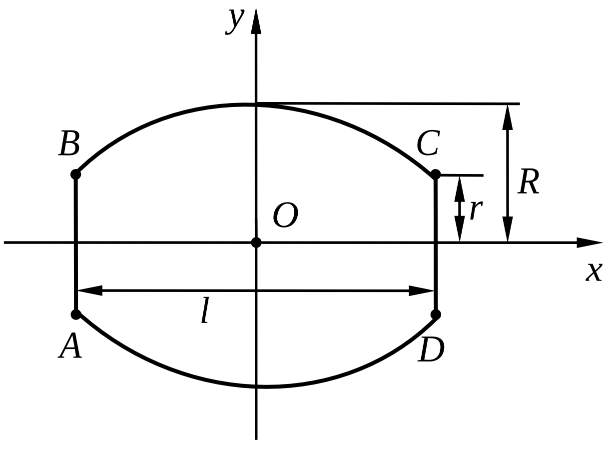


Рис. 32 Переріз бочки

Розв'язання. Знайдемо рівняння параболи, яка обмежує зверху криволінійну трапецію $ABCD$ (рис. 32). Оскільки віссю симетрії параболи є вісь Oy, то її рівняння має вигляд $y=ax^2+bx+c$. Коефіцієнти a, b і c

знайдемо з умови, що $y(0)=R$, $y\left(-\frac{1}{2}\right)=y\left(\frac{1}{2}\right)$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=r$. Отже, $a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=R;\ c=R.$

Тоді: $a\left(-\frac{1}{2}\right)^2+b\left(-\frac{1}{2}\right)+R=a\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\left(\frac{1}{2}\right)+R;\quad b=0;\quad a\left(\frac{1}{2}\right)^2+R=r;$

$a=\frac{4(r-R)}{l^2}$. Таким чином, рівняння параболи має вигляд: $y=\frac{4(r-R)}{l^2}x^2+R.$

$$V_{ox}=\pi\int_{-l/2}^{l/2}y^2(x)dx=2\pi\int_{0}^{l/2}\left(\frac{4(r-R)}{l^2}x^2+R\right)^2dx=$$

$$=2\pi\left[\frac{16(r-R)^2}{l^4}\cdot\frac{l^5}{5\cdot 32}+\frac{8(r-R)\cdot R}{l^2}\cdot\frac{l^3}{8\cdot 3}+R\cdot\frac{l}{2}\right]=$$

$$=\frac{\pi l}{15}\left(18\cdot R^2-6\cdot R\cdot r+3\cdot r^2+10r-10R\right).$$

$$V=\frac{0,5\pi}{15}\left(8\cdot 1^2-6\cdot 1\cdot 0,75+3\cdot 0,75^2+7,5-10\right)\approx 0,423\pi\,.$$

Відповідь: $0,423\pi$ м^3.

Приклад 36. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy плоскої фігури, обмеженої лініями: $y=\frac{2}{x}$, $y=1$, $y=4$, $x=0$.

Розв’язання. Побудуємо обмежувальні лінії: $y=\frac{2}{x}$ – гіпербола, гілки якої розташовані в І і ІІІ координатних чвертях; $y=1$ та $y=4$ – прямі, паралельні осі Ox; $x=0$ – вісь Oy (рис. 33).

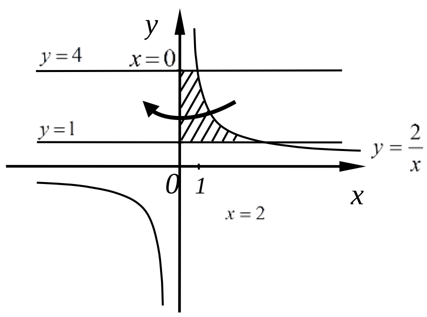


Рис. 33 Плоска фігура та напрям її обертання

При обертанні криволінійної трапеції (рис. 33) навколо осі Oy утворюється тіло обертання. Оскільки за умовою криволінійна трапеція обертається навколо осі Oy, то об'єм тіла обертання обчислимо за формулою: $V_{oy} = \pi \int\limits_{y_1}^{y_2} \varphi^2(y)dy$. За умовою: $y = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{y}$. Відтак, $\varphi(y) = \frac{2}{y}$, тоді: $\varphi^2(y) = \frac{4}{y^2}$.

При цьому: $1 \le y \le 4$, тобто маємо наступні границі інтегрування: $y_1 = 1,\ y_2 = 4$.

Тоді: $V_{oy} = \pi \int\limits_1^4 \frac{4}{y^2} dy = 4\pi \int\limits_1^4 y^{-2} dy = 4\pi \frac{y^{-1}}{-1}\Big|_1^4 = -4\pi \frac{1}{y}\Big|_1^4 =$

$= -4\pi\left(\frac{1}{4} - 1\right) = -4\pi\left(-\frac{3}{4}\right) = 3\pi$.

Відповідь: 3π (од. об'єму).

Площа поверхні обертання

Розглянемо поверхню, утворену обертанням кривої $y = f(x)$ навколо осі Ox, для якої треба обчислити площу на проміжку: $a \le x \le b$. При цьому функція $f(x)$ – неперервна та така, що має неперервну похідну в усіх точках відрізку $[a; b]$. Тоді, у разі наявності декартової системи координат, маємо:

$$S_{ox} = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} dx.$$

Приклад 37. Обчислити площу поверхні, створеної обертанням лінії $y = \operatorname{ch} x \quad (0 \le x \le 1)$ (рис. 34) навколо осі Ox.

Розв'язання. Для подальших обчислень візьмемо до уваги, що $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

$$S_{ox} = 2\pi\int_0^1 \operatorname{ch} x \cdot \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\, dx = 2\pi\int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{2\pi}{2}\int_0^1 (1+\operatorname{ch} 2x) dx =$$

$$= \pi\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x \right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2\right) = \frac{\pi}{2}\left(2+\frac{e^2-e^{-2}}{2}\right) = \pi\left(1+0{,}25\left[e^2-e^{-2}\right]\right).$$

Відповідь: $\pi\left(1+0{,}25\left[e^2-e^{-2}\right]\right)$ (од. площі).

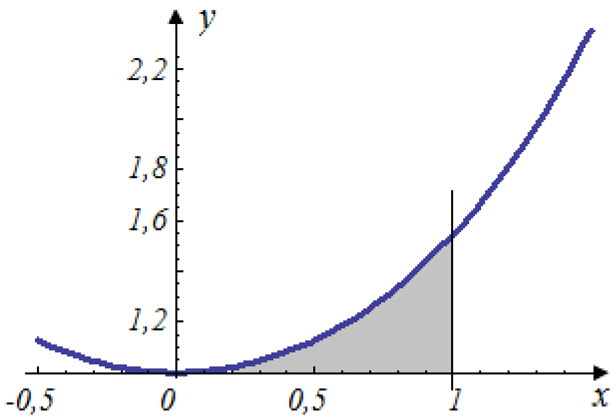


Рис. 34 До прикладу 37

Приклад 38. Знайти площу поверхні, утвореної шляхом обертанням навколо осі *Ox* кривої $3y - x^3 = 0$ на проміжку $0 \le x \le 1$.

Розв'язання. $3y - x^3 = 0$ або $y = \frac{1}{3}x^3$; $y' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$

$$S_{ox} = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{3}x^3 \cdot \sqrt{1+\left(x^2\right)^2}\, dx = \frac{2\pi}{3\cdot 4}\int_0^1 \left(1+x^4\right)^{\frac{1}{2}} d(1+x^4) =$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{3}\left(1+x^4\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{9}\pi\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{2}{9}\pi\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Відповідь: $\frac{2}{9}\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)$ (од. площі).

У разі параметрично заданого рівняння кривої, площа поверхні обертання навколо осі *Ox* обчислюється за формулою:

$$S_{ox} = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt .$$

Приклад 39. Знайти площу поверхні, утвореної шляхом обертанням арки циклоїди навколо її основи для загального випадку: $0 \le t \le 2\pi$, $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ Відповідь надати для $a = \sqrt{0{,}03}$ (рис. 35).

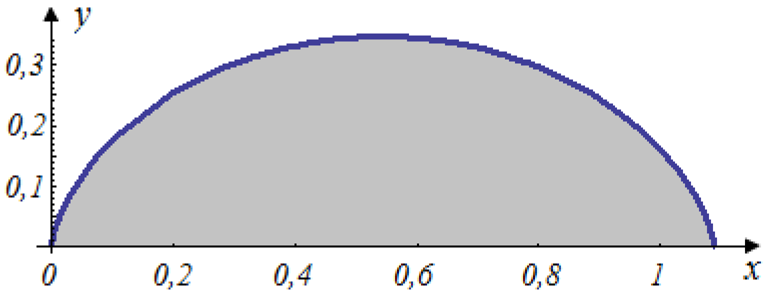


Рис. 35 Арка циклоїди

Розв'язання. $x'_t = a(1 - \cos t)$; $x'^2_t = a^2\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)$

$$y'_t = (-a\cos t)' = a\sin t;\ y'^2_t = a^2\sin^2 t$$

$$x'^2_t + y'^2_t = a^2\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right) = 2a^2(1 - \cos t) = 2 \cdot 2a^2\sin^2\frac{t}{2} =$$

$$= 4a^2\sin^2\frac{t}{2};\ S_{ox} = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt =$$

$$= 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\frac{t}{2} - 1\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right) \cdot 2 = 16\pi a^2\left(\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 16\pi a^2\left[\left(-\frac{1}{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] = 16\pi a^2\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{64\pi a^2}{3}.$$

Відповідь: $0{,}64\pi$ (од. площі).

Якщо криву задано у полярних координатах, то площа поверхні тіла, яке утворюється шляхом обертання цієї кривої навколо осі *Ox* дорівнює:

$$S_{ox} = 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi) \cdot \sin\varphi\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\varphi.$$

Приклад 40. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням равлика Паскаля $\rho = 2 + \cos\varphi$ навколо полярної осі *Ох*.

Розв'язання. Равлик Паскаля є алгебраїчною кривою четвертого порядку, яка симетрична відносно полярної осі *Ох*. Поверхня обертання утворюється фактично рухом тієї частини кривої, що знаходиться над віссю *Ох*, тобто $0 \le \varphi \le \pi$. Виконаємо розрахунки:

$$S_{ox} = \left| \begin{array}{l} \rho = 2 + \cos\varphi;\ \rho' = -\sin\varphi; \\ \rho^2(\varphi) + \rho'(\varphi) = (2 + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 5 + 4\cos\varphi \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (2 + \cos\varphi) \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{5 + 4\cos\varphi} \cdot d\varphi = \left| \begin{array}{l} z = \cos\varphi;\ dz = -\sin\varphi \cdot d\varphi; \\ z_1 = \cos 0 = 1;\ z_2 = \cos\pi = -1 \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi \int_{+1}^{-1} (2 + z)\sqrt{5 + 4z}\,dz = \left| \begin{array}{l} 5 + 4z = u^2;\ z = 0,25\left(u^2 - 5\right);\ dz = 0,5udu; \\ u = \sqrt{5 + 4z};\ u_1 = \sqrt{5 + 4} = 3;\ u_2 = \sqrt{5 - 4} = 1 \end{array} \right| =$$

$$= -2\pi \int_3^1 \left(2 + 0,25(u^2 - 5)\right) \cdot u \cdot 0,5udu = -0,25\pi \int_3^1 \left(3u^2 + u^4\right) du = 0,25\pi\left(u^3 + 0,2u^5\right)\Big|_1^3 =$$

$$= 0,25\pi(27 + 0,2 \cdot 243 - 1 - 0,2) = 0,25\pi \cdot 74,4 = 18,6\pi.$$

Відповідь: $18,6\pi$ (кв. од. або одиниць площі).

Зауваження. Якщо поверхня утворюється обертанням кривої навколо осі Oy, то формули для обчислення площі поверхні тіла аналогічні наведеним вище у цьому підрозділі, лише в них змінні «*x*» та «*y*» міняються ролями.

Приклад 41. Обчислити площу поверхні еліпсоїда, утвореної обертанням еліпса $4x^2 + y^2 = 4$ навколо осі Oy.

Розв'язання. Використовуючи симетрію і враховуючи, що $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{4 - y^2}$, $x' = -\dfrac{y}{2\sqrt{4 - y^2}}$, за формулою $S_{oy} = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x(y)\sqrt{1 + \left[x'(y)\right]^2}\,dy$ отримуємо:

$$\frac{1}{2}S_{oy}=2\pi\int_0^2\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\sqrt{1+\frac{y^2}{16-4y^2}}dy=\frac{\pi}{2}\int_0^2\sqrt{16-3y^2}dy.$$ Використаємо підстановку $y=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin t$, тоді:

$$S_{oy}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{16}{\sqrt{3}}\cos^2 t\cdot dt=\frac{16\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{\sin^2 t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right)=2\pi\left(1+\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right).$$

Відповідь: $2\pi\left(1+\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right)$ (од. площі).

Приклад 42. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням лемніскати Бернуллі $\rho^2=9\cos 2\varphi$ навколо осі Oy.

Розв'язання. Лемніската Бернуллі (рис. 36) симетрична як відносно координатної осі Ox, так і Oy. Знайдемо площу S_{oy}, яка дорівнює подвоєній площі поверхні, описаної дугою лемніскати, що знаходиться першому квадранті $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$, а саме:

$$S_{oy}=2\cdot 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}x(\varphi)\cdot dl=2\cdot 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho(\varphi)\cdot\cos\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\cdot d\varphi=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\rho=3\sqrt{\cos 2\varphi};\ \rho'=\dfrac{-3\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}};\ \sqrt{\rho^2(\varphi)+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}=\sqrt{9\cos 2\varphi+\dfrac{9\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}=\\ =\dfrac{\sqrt{9\left(\cos^2 2\varphi+\sin^2 2\varphi\right)}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}=\dfrac{3}{\sqrt{\cos 2\varphi}};\ \ \varphi_1=0;\ \ \varphi_2=\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right|=$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}3\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot\frac{3}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi=4\cdot 9\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\cdot d\varphi=36\pi\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=18\sqrt{2}\pi.$$

Відповідь: $18\sqrt{2}\pi$ (кв. од.).

Приклад 43. Обчислити площу поверхні тіла, утвореного шляхом обертання дуги параболи Нейла – напівкубічної параболи (рис. 37) навколо осі Oy, якщо обертається та її частина, що відсікається координатними осями: між точками з додатними координатами, а саму параболу задано у параметричному вигляді рівняннями: $\begin{cases} x = 4 - \dfrac{t^2}{2}, \\ y = \dfrac{t^3}{3}. \end{cases}$

Розв'язання. Площа поверхні для заданого умовою випадку знаходиться за допомогою формули: $S_{oy} = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt$. Спочатку виконаємо підготовчі розрахунки. Отже, $x_t' = -t$, $y_t' = t^2$, $\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = \sqrt{t^2 + t^4}$. Знайдемо границі інтегрування, розглянувши точки перетину параболи з осями координат: $x = 0$; $4 - \dfrac{t^2}{2} = 0$; $t^2 = 8$; $t = \pm 2\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $t_2 = 2\sqrt{2}$, оскільки частина дуги, що обертається, знаходиться у першому квадраті;

$y = 0$; $\dfrac{t^3}{3} = 0$; $t_1 = 0$.

Тоді:

$$S_{oy} = 2\pi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \left(4 - \frac{t^2}{2}\right)\sqrt{t^2 + t^4}\, dt = 2\pi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \left(4 - \frac{t^2}{2}\right)\sqrt{1 + t^2}\, tdt =$$

$$= \left| d\left(1 + t^2\right) = 2tdt;\;\; tdt = \frac{1}{2} d\left(1 + t^2\right) \right| =$$

$$= -2\pi \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \left(t^2 + 1 - 9\right)\sqrt{1 + t^2} \cdot \frac{1}{2} d\left(1 + t^2\right) = \begin{vmatrix} 1 + t^2 = z \\ z_1 = 1 \\ z_2 = 9 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_1^9 (z-9)\sqrt{z}\,dz = -\frac{\pi}{2}\int_1^9 \left(z^{\frac{3}{2}} - 9z^{\frac{1}{2}} \right) \cdot dz = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}} \Bigg|_1^2 - 9\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^9 \right) =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}(243-1) - 6(27-1) \right) = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{484}{5} - 156 \right) = \pi\left(78 - 48\frac{2}{5} \right) =$$

$$= 29\frac{3}{5}\pi = 29{,}6\,.$$

Відповідь: $29{,}6\pi$ (од. площі).

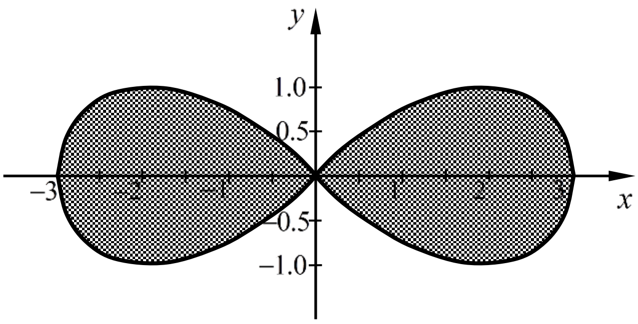


Рис. 36 Лемніската Бернуллі

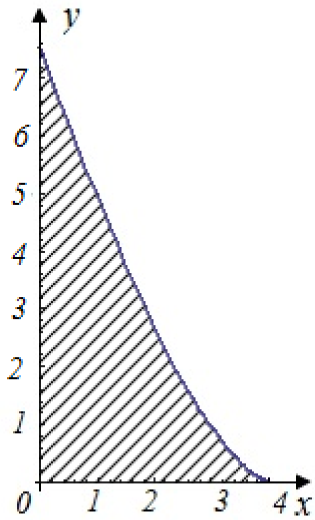


Рис. 37 Парабола Нейла

Застосування визначеного інтеграла у розв'язанні фізичних задач

Для обчислення геометричних величин (площі фігур, довжини дуг, об'ємів, площі поверхні обертання) були застосовані готові формули для розрахунків. Для вирішення фізичних завдань готові формули у більшості випадків не застосовуються.

Маса: неоднорідного стрижня, дуги, плоскої фігури

Нехай неоднорідний стрижень з лінійною густиною $\rho(x)$ розташовано на сегменті $[a;b]$, при цьому $\rho(x)$ – є функцією неперервною на $[a;b]$.

Оскільки, $\rho\left(x\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$, де Δm – маса частини стрижня на відрізку $\left[x;\ x+\Delta x\right]$. Розіб'ємо $\left[a;b\right]$ таким чином: $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$. На кожному частинному відрізку $\left[x_{k-1};x_k\right]$ оберемо довільну точку ξ_k і припустимо, що на цьому елементарному сегменті густина є постійною величиною та дорівнює $\rho\left(\xi_k\right)$. Тоді елементарна маса m_k відповідного сегменту наближено дорівнюватиме добутку $\rho\left(\xi_k\right)\cdot\Delta x_k$, де $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$.

Відтак, маса m усього *стрижня* приблизно дорівнюватиме сумі: $m_n\approx\sum\limits_{k=1}^{n}\rho\left(\xi_k\right)\cdot\Delta x_k$. Задля знаходження точного значення m перейдемо до границі, враховуючи що $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k\to 0$: $\lim\limits_{\lambda\to 0}m_n$. Отже, $m=\int\limits_a^b\rho\left(x\right)dx$.

Приклад 44. Знайти масу стрижня (рис. 38) довжиною $l=3$, якщо його лінійна густина змінюється за законом:

$$\rho(x)=\frac{3x^5-46x^4+255x^3-611x^2+966x-1359}{(x+1)(x^2+4)(x-5)^3},$$

де x – відстань від одного із кінців стрижня.

Розв'язання. Маса елементарної частини стрижня dm дорівнює добутку його густини та елементарного об'єму dV.

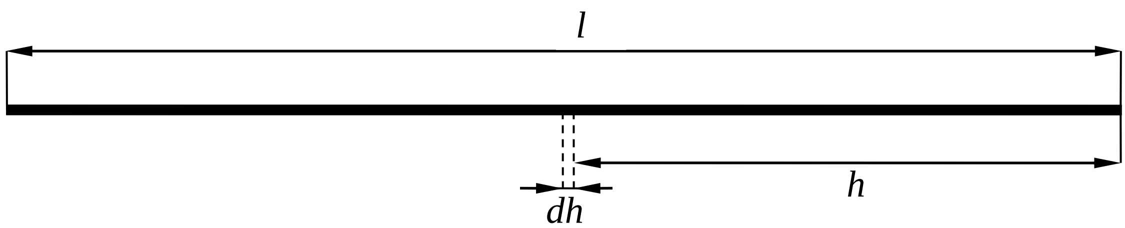


Рис. 38. Схематичне зображення стрижня: l – довжина стрижня; dh – довжина, що відповідає частині стрижня з елементарним об'ємом; h – відстань, на якій знаходиться частина стрижня з елементарним об'ємом, від кінця стрижня

Розкладемо дріб $\rho(x)=\dfrac{3x^5-46x^4+255x^3-611x^2+966x-1359}{(x+1)(x^2+4)(x-5)^3}$ на прості: $\dfrac{3x^5-46x^4+255x^3-611x^2+966x-1359}{(x+1)(x^2+4)(x-5)^3}=$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}+\frac{D}{x-5}+\frac{E}{(x-5)^2}+\frac{F}{(x-5)^3}.$$

Зведемо дроби у правій частині отриманої рівності до спільного знаменника. Дроби із однаковими знаменниками будуть рівні тоді, коли їх чисельники рівні між собою, відтак:

$$3x^5-46x^4+255x^3-611x^2+966x-1359=$$

$$=A(x^2+4)(x-5)^3+(Bx+C)(x+1)(x-5)^3+D(x+1)(x^2+4)(x-5)^2+$$

$$+E(x+1)(x^2+4)(x-5)+F(x+1)(x^2+4)\ (*).$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів *A, B, C, D, E, F* скористуємось методом коренів:

$\underline{x=5}$: $3\cdot5^5-46\cdot5^4+255\cdot5^3-611\cdot5^2+966\cdot5-1359=$

$$=A(5^2+4)(5-5)^3+(B\cdot5+C)(5+1)(5-5)^3+D(5+1)(5^2+4)(5-5)^2+$$

$$+E(5+1)(5^2+4)(5-5)+F(5+1)(5^2+4);\ 696=174F;\ \underline{F=4}.$$

$\underline{x=-1}$: $3\cdot(-1)^5-46\cdot(-1)^4+255\cdot(-1)^3-611\cdot(-1)^2+966\cdot(-1)-1359=$

$$=A((-1)^2+4)((-1)-5)^3+(B\cdot(-1)+C)((-1)+1)((-1)-5)^3+$$

$$+D((-1)+1)((-1)^2+4)((-1)-5)^2+E((-1)+1)((-1)^2+4)((-1)-5)+$$

$$+F((-1)+1)((-1)^2+4);\ -1080A=-3240;\ \underline{A=3};$$

Підставимо попередньо обчислені значення $A=3$ та $F=4$ до (*):

$$-x^4+14x^3-60x^2+50x+125=(Bx+C)(x+1)(x-5)^3+$$

$$+D(x+1)(x^2+4)(x-5)^2+E(x+1)(x^2+4)(x-5);$$

$$-(x+1)(x-5)^3=(Bx+C)(x+1)(x-5)^3+D(x+1)(x^2+4)(x-5)^2+$$

$+E(x+1)(x^2+4)(x-5)\Big| : (x+1)(x-5)$;

$-(x-5)^2 = (Bx+C)(x-5)^2 + D(x^2+4)(x-5) + E(x^2+4)$ (**).

Знову скористуємося методом коренів для визначення ще невідомих коефіцієнтів:

$\underline{x=5}$: $-(5-5)^2 = (B\cdot 5+C)(5-5)^2 + D(5^2+4)(5-5) + E(5^2+4)$;

$0 = 29E$; $\underline{E=0}$.

Підставимо значення коефіцієнта E до (**):

$-(x-5)^2 = (Bx+C)(x-5)^2 + D(x^2+4)(x-5)\Big| : (x-5)$;

$-(x-5) = (Bx+C)(x-5) + D(x^2+4)$ (***).

Ще раз скористуємося методом коренів:

$\underline{x=5}$: $-(5-5) = (B\cdot 5+C)(5-5) + D(5^2+4)$; $0 = 29D$; $\underline{D=0}$.

Підставимо значення вже відомих коефіцієнтів *A, D, E, F* до (***):

$-(x-5) = (Bx+C)(x-5)\Big| : (x-5)$; $-1 = Bx + C$ (****).

Для знаходження B і C можна використати як метод коренів, підставивши $x = 2i$ або $x = -2i$. Або скористатися методом невизначених коефіцієнтів, дорівнюючи коефіцієнти при x^0 та x^1 ліворуч і праворуч у рівності (****). Отже, отримуємо: $\begin{cases} B = 0; \\ C = -1. \end{cases}$

Таким чином, формула лінійної густини у вигляді суми простих дробів записується так: $\rho(x) = \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{1}{x^2+4} + \dfrac{4}{(x-5)^3}$.

Якщо радіус перерізу стрижня дорівнює r, то площа перерізу стрижня дорівнює $S = \pi \cdot r^2$. З огляду на те, що стрижень абсолютно тонкий, нехай, що його площа перерізу $S = 1$.

Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n однакових відрізків довжиною dh. Елементарний об'єм стрижня довжиною dh, який знаходиться на відстані h від одного з кінців стрижня, буде таким: $dV = S \cdot dh$; а відповідна йому елементарна маса: $dm=\rho(h)\cdot dV=\pi r^2\left(\frac{3}{h+1}-\frac{1}{h^2+4}+\frac{4}{(h-5)^3}\right)dh$. Відтак, сума усіх таких елементарних мас матиме вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{h+1}-\frac{1}{h^2+4}+\frac{4}{(h-5)^3}\right)dh.$$

Для отримання точної формули перейдемо до границі, збільшуючи кількість дроблень: $n\to\infty$, тим самим нескінченно подрібнюючи самі інтервали dh:

Для отримання точної формули перейдемо до границі, збільшуючи кількість дроблень: $n\to\infty$, тим самим нескінченно подрібнюючи самі інтервали dh:

$$m=\lim_{dh\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{h+1}-\frac{1}{h^2+4}+\frac{4}{(h-5)^3}\right)dh=\int_0^l\left(\frac{3}{h+1}-\frac{1}{h^2+4}+\frac{4}{(h-5)^3}\right)dh.$$

Тоді, маса стрижня, яку потрібно знайти, обчислюється за формулою:

$$m=\int_0^l\left(\frac{3}{h+1}-\frac{1}{h^2+4}+\frac{4}{(h-5)^3}\right)dh=\left(3\int_0^l\frac{dh}{h+1}-\int_0^l\frac{dh}{h^2+4}+4\int_0^l\frac{dh}{(h-5)^3}\right)=$$

$$=\left(3\ln|h+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{h}{2}-\frac{2}{(h-5)^3}\right)\Bigg|_0^l=3\ln|l+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{l}{2}-\frac{2}{(l-5)^2}+\frac{2}{25}.$$

Підставляючи числові значення, наближено отримуємо:

$$m=3\ln|3+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}-\frac{2}{(3-5)^3}+\frac{2}{25}\approx 4{,}16-0{,}49-0{,}5+0{,}08\approx 3{,}25.$$

Відповідь: $3{,}25$ (од. маси).

Задля визначення *маси неоднорідної дуги*, густина якої змінюється тільки залежно від абсциси, використовується формула:

$$m=\int_a^b\rho(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx\ .$$

Приклад 45. Знайти масу дуги кривої $y = \ln x$ від точки з абсцисою $x = \sqrt{3}$ до точки з абсцисою $x = \sqrt{8}$, якщо густина матеріалу в кожній точці дорівнює $\dfrac{5x^2}{1+x^2}$.

Розв'язання. Для визначення маси дуги використаємо формулу: $m = \int\limits_a^b \rho(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$, де $y' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. За умовою задачі $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$, $\rho(x) = \dfrac{5x^2}{1+x^2}$. Тоді: $m = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \dfrac{5x^2}{1+x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\,dx =$

$$= 5\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = 5\sqrt{x^2+1}\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} = 5\left(\sqrt{9}-\sqrt{4}\right) = 5(3-2) = 5.$$

Відповідь: $m = 5$ од. маси.

Розглянемо обчислення *маси абсолютно тонкої фігури* Q (будь-якої криволінійної трапеції), яка обмежена лініями: $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $a \le x \le b$, де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – неперервні на $[a; b]$ функції. Нехай на Q розподілена маса з густиною, змінюваної залежно від абсциси – $\rho(x)$. Тоді маса m фігури Q дорівнює $m = \int\limits_a^b \left(y_2(x) - y_1(x)\right)\rho(x)\,dx$. Зокрема, якщо густина дорівнює 1, то маса співпадає з площею фігури Q.

Приклад 46. Знайти масу абсолютно тонкої пластини, обмеженої лініями: $y = \dfrac{2}{(x-1)^2}$, $y = 5+2x$, якщо густина матеріалу $\rho(x) = x^3$.

Розв'язання. Оскільки лінія $y = 5+2x$ знаходиться над лінією

$y = \dfrac{2}{(x-1)^2}$ (рис. 39), то у вище наведеній формулі для обчислення

маси пластини, вони відповідно означають: $y_2 = 5 + 2x$, $y_1 = \dfrac{2}{(x-1)^2}$.

Границі інтегрування визначимо аналітично з системи рівнянь:

$\begin{cases} y = \dfrac{2}{(x-1)^2}, \\ y = 5 + 2x. \end{cases}$ У підсумку отримуємо: $\left[\begin{array}{l} x_1 = -1 - \sqrt{2}, \\ x_2 = -1 + \sqrt{2}, \\ x_3 = \dfrac{3}{2}. \end{array} \right.$

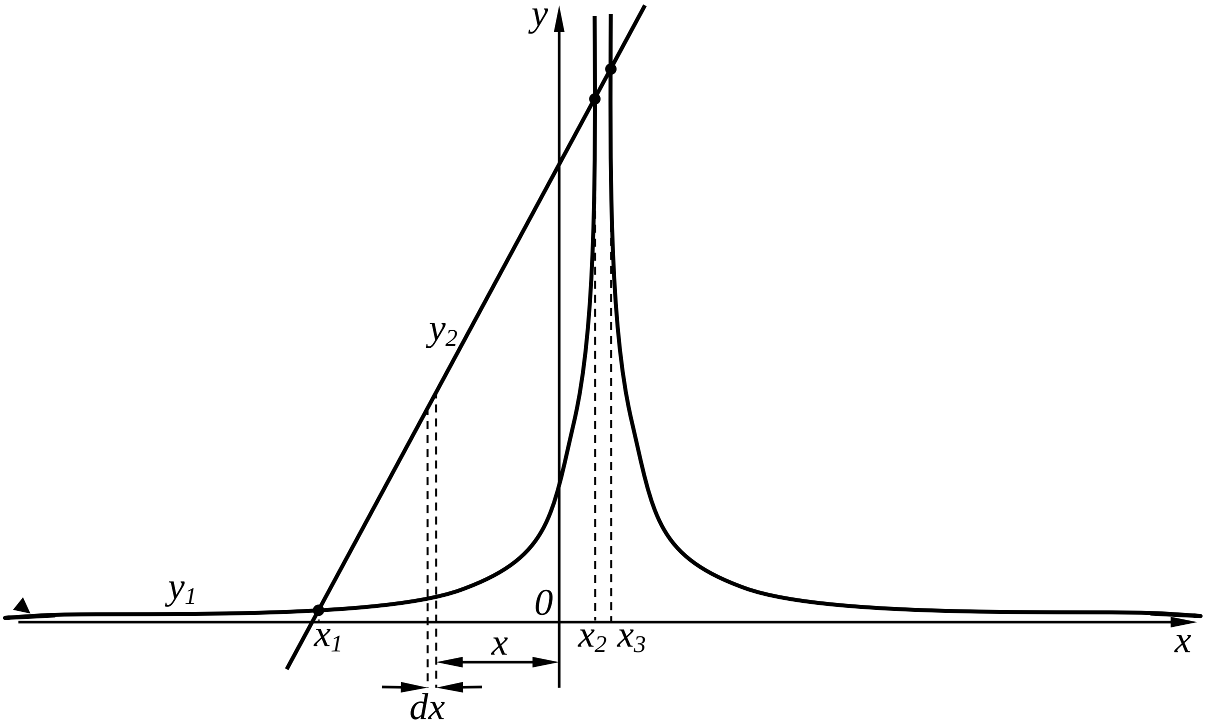


Рис. 39. Схематичне зображення криволінійної трапеції відповідно до форми пластини: y_1 і y_2 – лінії, що обмежують пластину; x_1, x_2, x_3 – абсциси точок перетину трьох ліній; dx – довжина елементарного об'єму пластини; x – відстань від початку координат до елементарного об'єму

За умовою задачі обираємо ті значення, які її задовольняють. Отже, маємо наступні границі інтегрування: $\begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{2}, \\ x_2 = -1 + \sqrt{2}. \end{cases}$

Врахуємо, що маса елементарної частини пластини dm дорівнює добутку її густини та елементарного об'єму dV. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n однакових відрізків довжиною dx. Елементарна площина частини пластини довжиною dx та з абсцисою x буде такою: $dS = (y_2(x) - y_1(x))dx$; враховуючи, що пластина абсолютно тонка, можна сказати, що елементарний об'єм елементарної частини пластини також дорівнює $dV = dS = (y_2(x) - y_1(x))dx$; елементарна маса елементарної частини пластини з абсцисою x: $dm = \rho(h) \cdot dV = x^3(y_2(x) - y_1(x))dx$. Отже, сума усіх таких елементарних мас буде такою: $\sum\limits_{i=1}^{n} x^3(y_2(x) - y_1(x))dx$.

Для отримання точної формули перейдемо до границі, збільшуючи число дроблень – $n \to \infty$, тим самим нескінченно подрібнюючи самі інтервали dh: $m = \lim\limits_{dh \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} x^3(y_2(x) - y_1(x))dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} x^3(y_2(x) - y_1(x))dx$.

Відтак, маса, яку має пластина, обчислюється за формулою:

$$m = \int\limits_{x_1}^{x_2} x^3\left(5 + 2x - \frac{2}{(x-1)^2}\right)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} 5x^3dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} 2x^4dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{2x^3}{(x-1)^2}dx =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} 5x^3dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} 2x^4dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} 2xdx - \int\limits_{x_1}^{x_2} 4dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{6x-4}{(x-1)^2}dx =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} 5x^3dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} 2x^4dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} 2xdx - \int\limits_{x_1}^{x_2} 4dx - 6\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{d(x-1)}{x-1} - 2\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \left(\frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{5}x^5 - x^2 - 4x - 6\ln|x-1| + \frac{2}{x-1}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} =$$

$$=\frac{5}{4}\left(x_2{}^4-x_1{}^4\right)+\frac{2}{5}\left(x_2{}^5-x_1{}^5\right)-\left(x_2{}^2-x_1{}^2\right)-4\left(x_2-x_1\right)-6\left(\ln\left|x_2-1\right|-\right.$$

$$\left.-\ln\left|x_1-1\right|\right)+\left(\frac{2}{x_2-1}-\frac{2}{x_1-1}\right)=$$

$$=\frac{5}{4}\left(x_2-x_1\right)\left(x_2+x_1\right)\left(x_2{}^2+x_1{}^2\right)+\frac{2}{5}\left(x_2-x_1\right)\left(x_2{}^4+x_2{}^3x_1+x_2{}^2x_1{}^2+x_2x_1{}^3+x_1{}^4\right)-$$

$$-\left(x_2-x_1\right)\left(x_2+x_1\right)-4\left(x_2-x_1\right)-6\ln\left|\frac{x_2-1}{x_1-1}\right|+2\frac{x_1-x_2}{\left(x_2-1\right)\left(x_1-1\right)}.$$

Підставляючи числові значення границь інтегрування, отримуємо:

$$m=\frac{5}{4}\left(-1-\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\right)\left(-1-\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right)\left(\left(-1-\sqrt{2}\right)^2+\left(-1+\sqrt{2}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{2}{5}\left(\left(-1-\sqrt{2}\right)-\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)\left(\left(-1-\sqrt{2}\right)^4+\left(-1-\sqrt{2}\right)^3\left(-1+\sqrt{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(-1-\sqrt{2}\right)^2\left(-1+\sqrt{2}\right)^2+\left(-1-\sqrt{2}\right)\left(-1+\sqrt{2}\right)^3+\left(-1+\sqrt{2}\right)^4\right)-$$

$$-\left(\left(-1-\sqrt{2}\right)-\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)\left(\left(-1-\sqrt{2}\right)+\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)-4\left(\left(-1-\sqrt{2}\right)-\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)-$$

$$-6\ln\left|\frac{-1-\sqrt{2}-1}{-1+\sqrt{2}-1}\right|+2\frac{\left(-1+\sqrt{2}\right)-\left(-1-\sqrt{2}\right)}{\left(-1-\sqrt{2}-1\right)\left(-1+\sqrt{2}-1\right)}=$$

$$=\frac{5}{4}\cdot4\sqrt{2}\cdot6-\frac{2}{5}\cdot2\sqrt{2}\left(17+12\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}+1-3+2\sqrt{2}+17-12\sqrt{2}\right)-4\sqrt{2}+$$

$$+8\sqrt{2}-6\ln\left|\frac{-2-\sqrt{2}}{-2+\sqrt{2}}\right|+2\frac{2\sqrt{2}}{4-2}\approx30\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{2}}{5}29+4\sqrt{2}-10{,}58+2\sqrt{2}\approx$$

$$\approx36\sqrt{2}-23{,}2\sqrt{2}-10{,}58\approx12{,}8\sqrt{2}-10{,}58\approx18{,}1-10{,}58=7{,}52.$$

Відповідь: 7,52 (одиниць маси).

Статичні моменти і моменти інерції плоских фігур і дуг

Статичний момент M матеріальної точки маси m відносно деякої осі дорівнює добутку маси m на відстань d точки від осі. У випадку системи n матеріальних точок з масами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, що лежать в одній площині з віссю, відповідно, на відстанях $d_1, d_2, \dots, d_n$ від осі, статичний момент становить суму добутків вище означених мас і відстаней: $M = \sum_i m_i d_i$.

При цьому відстані точок, що лежать по одну сторону від осі, беруться зі знаком плюс, а відстані по іншу сторону – зі знаком мінус.

Нехай на площині xOy задана система матеріальних точок $A_1(x_1; y_1),\ A_2(x_2; y_2),\ \dots,\ A_n(x_n; y_n)$, маси яких становлять: $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Статичним моментом M_x цієї системи відносно осі Ox називається сума добутків мас цих точок на їх ординати: $M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k$. Аналогічно, тобто як сума добутків мас точок на їх абсциси, визначається статичний момент системи відносно осі Oy: $M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k$.

Якщо маси не зосереджені в окремих точках, а розташовані суцільним чином, заповнюючи лінію чи плоску фігуру, то тоді для вираження статичного моменту замість суми знадобиться інтеграл. Відтак, статичні моменти дуги плоскої кривої $y = f(x),\ (a \le x \le b)$ обчислюються за формулами: $M_x = \int_a^b y\,dl$, де $dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ – диференціал дуги кривої; а $M_y = \int_a^b x\,dl = \int_a^b x\sqrt{1 + (y')^2}\,dx$.

При цьому робиться припущення, що крива однорідна, тобто її лінійна густина ρ є незмінною величиною; для простоти також вважають, що $\rho = 1$ (в іншому випадку доведеться отриманий результат помножити на ρ). За цих допущень маса будь-якої дуги кривої вимірюється її довжиною, і поняття статичного моменту набуває суто геометричного характеру.

Теорема. Якщо матеріальна крива симетрична відносно осі ординат та однорідна, то її статичний момент $M_y = 0$.

Теорема. Статичний момент декількох кривих дорівнює сумі їх статичних моментів.

Статичні моменти криволінійної трапеції, обмеженої лініями: $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, обчислюються за наступними формулами. Відносно осі Ox – $M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y dS = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx$, а відносно Oy – $M_y = \frac{1}{2}\int_a^b x dS = \frac{1}{2}\int_a^b xy dx$, де $dS = y\,dx$ – диференціал площі криволінійної трапеції.

***Приклад* 47.** Знайти статичні моменти M_x та M_y дуги астроїди $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{3}{2}}$ (рис. 40), розташованої у першому квадранті координатної площини: $x > 0,\ y > 0$ (рис. 41), відносно осей координат.

Розв'язання. Із симетрії астроїди відносно осей координат, шукані величини повинні бути рівними між собою. Доведемо цей факт. Знайдемо спочатку, наприклад, M_x: $M_x = \int_0^5 y dl$.

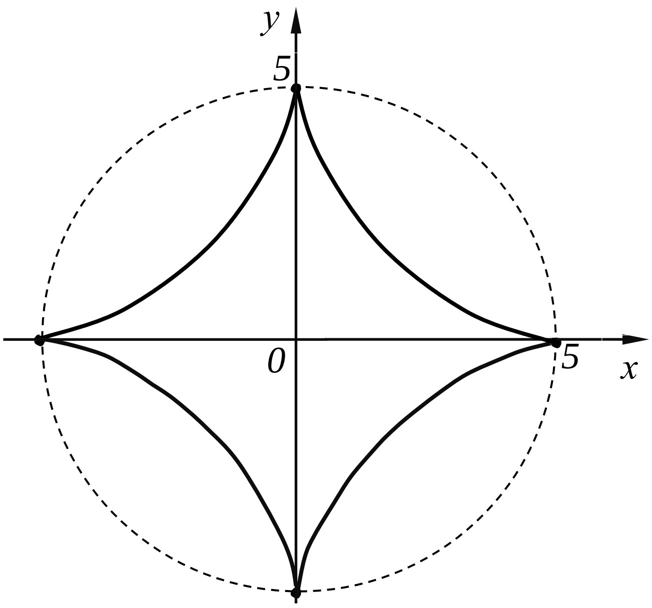


Рис. 40 Астроїда: $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{3}{2}}$

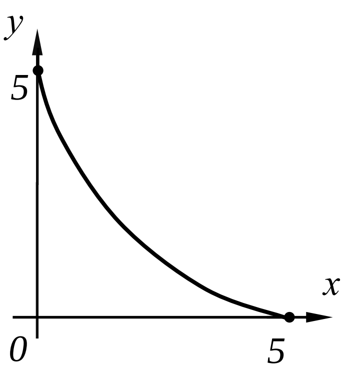


Рис. 41 Дуга астроїди

Виразимо явно «y» із рівняння кривої: $y=\left(5^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. Оскільки,

$\left(y'\right)^2=\left(5^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)x^{-\frac{2}{3}}$, то $\sqrt{1+\left(y'\right)^2}=\left(\frac{5}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$. Отже, $M_x=5^{\frac{1}{3}}\int\limits_0^5\left(5^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}=$

$$=\left|u=x^{\frac{2}{3}};\ \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{3}{2}du;\ u_н=0;\ u_в=5^{\frac{2}{3}}\right|=\frac{3}{2}\int\limits_0^{5^{\frac{2}{3}}}\left(5^{\frac{2}{3}}-u\right)^{\frac{3}{2}}du=\frac{3}{5}\cdot 5^2=15.$$

$$M_y=\int\limits_0^5 xdl,\ dl=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\left(\frac{5}{x}\right)^{\frac{1}{3}}dx.$$

Відтак, $M_y=5^{\frac{1}{3}}\int\limits_0^5 x\cdot x^{-\frac{1}{3}}dx=5^{\frac{1}{3}}\int\limits_0^5 x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{3}{5}5^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{5}{3}}\Big|_0^5=15.$

Відповідь: $M_x=M_y=15.$

Моментами інерції I_x та I_y системи відносно осей Ox і Oy називаються суми добутків мас точок на квадрати їх відстаней від відповідної осі, а саме: $I_x=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k{y_k}^2$, $I_y=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k{x_k}^2$. При цьому моменти інерції плоских фігур і дуг приймають відповідні моменти умовних мас, рівномірно розподілених уздовж цих дуг і фігур з лінійною або площинною щільністю, яка дорівнює одиниці. Моменти інерції дуги плоскої кривої $y=f\left(x\right)$ $\left(a\le x\le b\right)$ обчислюються за формулами: $I_x=\int\limits_a^b y^2dl,\quad I_y=\int\limits_a^b x^2dl$,

де $dl=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx$ – диференціал дуги кривої.

Приклад 48. Знайти статичний момент і момент інерції півкола $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $(-r\le x\le r)$ відносно осі Ox.

Розв'язання. Статичний момент M_x обчислюватимемо за формулою: $M_x=\int\limits_a^b ydl$, де $dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, а $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Тоді

$$M_x=\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=r\int\limits_{-r}^{r}dx=2r^2.$$

Знайдемо тепер момент інерції відносно осі Ox:

$$I_x=\int\limits_a^b y^2dl=\int\limits_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=r\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx=2r\int\limits_0^t\sqrt{r^2-x^2}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x=r\sin t,\ \ dx=r\cos tdt \\ якщо\ \ x=0,\ то\ \ t=0 \\ якщо\ \ x=r,\ то\ \ t=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right|=2r\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\,r\cos tdt=2r^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=$$

$$=r^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=r^3\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi r^3}{2}.$$

Відповідь: $0{,}5\pi r^3$.

Моменти інерції криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$, віссю Ox і двома прямими $x=a,\ x=b$, обчислюються за формулами: $I_x=\dfrac{1}{3}\int\limits_a^b y^3dx$, $I_y=\int\limits_a^b x^2dS=\int\limits_a^b x^2ydx$. Тут $dS=ydx$ – диференціал площі криволінійної трапеції.

Приклад 49. Знайти момент інерції площі еліпса $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ відносно осі Oy.

Розв'язання. Момент інерції площі еліпса відносно осі Oy дорівнює $I_y = \int\limits_{-a}^{a} x^2 dS$, де $dS = 2ydx$. Відповідно до параметричних рівнянь еліпса знаходимо: $dS = 2b\sin t a(-\sin t)dt = -2ab\sin^2 t dt$. Звідки, враховуючи, по-перше, що x^2 – функція парна; а, по-друге, якщо $x = a$, то $t = 0$; якщо $x = 0$, то $t = \frac{\pi}{2}$, отримуємо:

$$I_y = 2\int\limits_0^a x^2 dS = 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2\cos^2 t\left(-2ab\sin^2 t dt\right) = -4a^3 b\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t\sin^2 t dt =$$

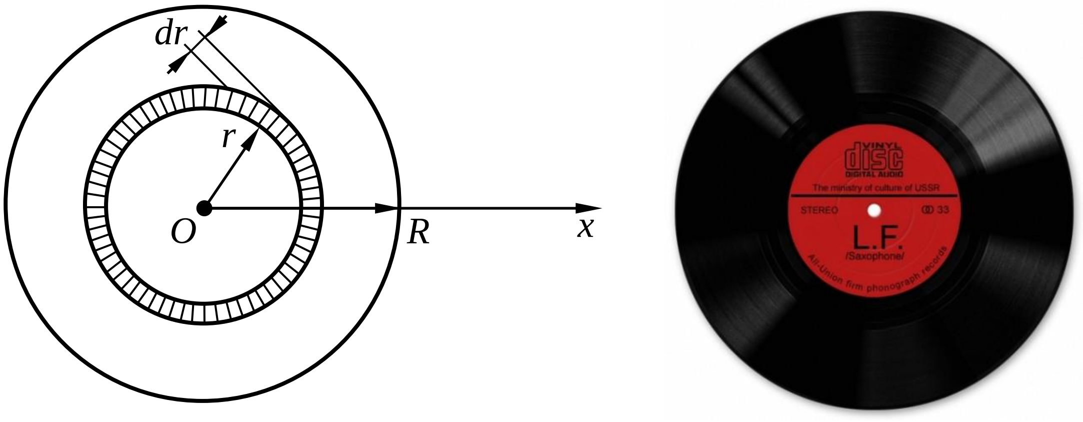
$$= -a^3 b\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 2t dt = -\frac{a^3}{b}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos 4t)dt = -\frac{a^3 b}{2}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

Відповідь: $I_y = 0{,}25\pi a^3 b$.

Приклад 50. Інженерам підприємства, що спеціалізується на виготовленні сувенірної продукції потрібно створити міні грамофон для програвання вінілових платівок. Платівка має форму диска масою $m = 7$ (од. маси) та радіусом $R = 2$ (од. довжини). Розробникам необхідно для подальших розрахунків знати момент інерції круга, відносно його центра, нехтуючи товщиною платівки.

Розв'язання. Момент інерції матеріальної точки масою m відносно точки O дорівнює добутку маси цієї точки на квадрат її відстані до точки O (рис. 42 а). Момент інерції системи матеріальних точок дорівнює сумі моментів інерції всіх точок системи. Концентричними колами з центром у точці O розіб'ємо круг на n кілець шириною dr, площа кожного з яких: $dS = 2\pi r dr$, а маса $dm = 2\pi r dr\rho$, де поверхнева густина – $\rho = \frac{m}{\pi R^2}$.

Отже, елементарні моменти інерції виділених кілець обчислюються за формулою: $dI_0 = 2\pi\rho r^3 dr$. Таким чином, підсумовуючи (інтегруючи) елементарні моменти інерції, отримуємо момент інерції круга в загальному вигляді: $I = \int\limits_0^R 2\pi\rho r^3 dr = 2\pi\rho \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{1}{2}\pi R^4 \frac{m}{\pi R^2} = \frac{1}{2} mR^2$.



а б

Рис. 42: а) схематичне зображення круга; б) зовнішній вигляд вінілової платівки

Для отримання кількісного значення моменту інерції у отриману формулу підставимо задані за умовою задачі параметри. Відтак, $I = \frac{7}{2} \cdot 4 = 14$.

Відповідь: 14 (од. вимірювання моменту інерції).

Координати центра ваги

Точка площини з координатами $(\bar{x};\ \bar{y})$, яка має таку властивість, що коли в неї помістити матеріальну точку маси, яка дорівнює масі кривої, то ця точка відносно будь-якої координатної осі матиме статичний момент, чисельно рівний статичному моменту кривої відносно тієї ж осі, називається центром ваги (або центром мас) даної кривої.

Координати центру ваги $(\bar{x};\ \bar{y})$ однорідної дуги плоскої кривої $y = f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ знаходять за формулами:

$$\bar{x}=\frac{M_y}{l}=\frac{1}{l}\int_a^b xdl\,;\quad \bar{y}=\frac{M_x}{l}=\frac{1}{l}\int_a^b ydl\,,$$ де $dl=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx$ – диференціал дуги кривої, а l – довжина дуги.

Приклад 51. Знайти координати центру ваги дуги ланцюгової лінії $y=a\cdot\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ на відрізку $\left[-a;\ a\right]$.

Розв'язання. Оскільки ця крива симетрична відносно осі Oy, то її центр ваги лежить на цій осі, отже, $\bar{x}=0$. Залишається знайти $\bar{y}$. Маємо $y'=\mathrm{sh}\dfrac{x}{a}$; тоді $dl=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\dfrac{x}{a}}\,dx=\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}dx$; а довжина дуги становить:

$$l=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx=2\int_0^a \mathrm{ch}\frac{x}{a}dx=2a\cdot\mathrm{sh}\frac{x}{a}\bigg|_0^a=2a\cdot\mathrm{sh}1.$$

Таким чином,

$$\bar{y}=\frac{1}{l}\int_{-a}^{a}ydl=\frac{1}{2a\cdot\mathrm{sh}1}2\int_0^a a\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}dx=\frac{1}{2\mathrm{sh}1}\int_0^a\left(1+\mathrm{ch}\frac{2x}{a}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{sh}1}\left(x+\frac{a}{2}\mathrm{sh}\frac{2x}{a}\right)\bigg|_0^a=\frac{a}{2\mathrm{sh}1}\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{sh}2\right)=\frac{a\left(2+\mathrm{sh}2\right)}{4\mathrm{sh}1}\approx 1{,}18a.$$

Відповідь: $\left(0;\ 1{,}18a\right)$.

Приклад 52. Знайти центр мас тієї частини дуги астроїди: $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, яка лежить вище осі Ox: $0\le t\le\pi$.

Розв'язок. Для більш точного уявлення даної астроїди (рис. 43), знайдемо допоміжні точки кривої при $t=\dfrac{\pi}{4}$. Тоді:

$$x=y=a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=a\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}35a.$$ При $t=\dfrac{3\pi}{4}$: $x=y\approx -0{,}35a$.

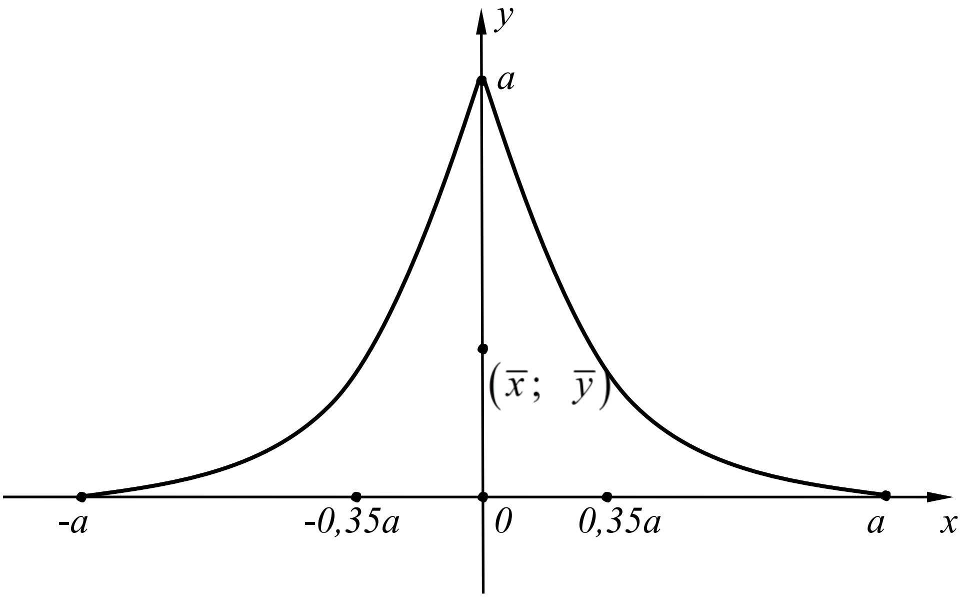


Рис. 43 Верхня частина дуги астроїди

Нехай точка з координатами $(\bar{x};\ \bar{y})$ є центром мас дуги. Вважатимемо, що крива однорідна, тоді густина кривої γ буде дорівнювати $\gamma = const$, а саме: $\gamma = 1$. Оскільки криву задано у параметричному вигляді, то: $l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$, тобто: $l = \int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$. Обчислимо окремо підкореневий вираз:

$$\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 = \left[\left(a\cos^3 t\right)'\right]^2 + \left[\left(a\sin^3 t\right)'\right]^2 = \left(3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)\right)^2 +$$

$+\left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2 = 9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t$. Спільний множник виносимо за дужки: $9a^2\cos^2 t\sin^2 t\cdot(\cos^2 t + \sin^2 t) = (3a\cos t\sin t)^2$. Відтак: $\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{(3a\cos t\cdot\sin t)^2} = |3a\cos t\cdot\sin t| = 3a|\cos t\cdot\sin t|$.

$$l = 3a\int\limits_0^{\pi}|\cos t\sin t|dt = 6a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\,dt = 6a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,d(\sin t) = 6a\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3a.$$

Для знаходження координат центра мас кривої, треба попередньо знайти її статистичні моменти відносно осей Ox та Oy.

$$M_y = \int_a^b x \cdot dl =$$

$$= \int_0^{\pi} x_t \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt = \int_0^{\pi} a\cos^3 t \cdot 3a\left|\cos t \sin t\right| = 3a^2 \int_0^{\pi} \cos^3 t \left|\cos t \sin t\right| dt =$$

$$= 3a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \cdot \sin t dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t \cdot \sin t dt \right) = \left|\sin t dt = d(-\cos t)\right| =$$

$$= 3a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \cdot d(-\cos t) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t \cdot d(-\cos t) \right) = -3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \cdot d(\cos t) +$$

$$+3a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t \cdot d(\cos t) = -3a^2 \frac{\cos^5 t}{5}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + 3a^2 \frac{\cos^5 t}{5}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{3a^2}{5} - \frac{3a^2}{5} = 0.$$

Отже, абсциса центру ваги $\overline{x} = 0$.

Аналогічно знаходимо: $M_x = \int_a^b y \cdot dl = \int_0^{\pi} y_t \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt =$

$$= \int_0^{\pi} a\sin^3 \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt = \int_0^{\pi} a\sin^3 t \cdot 3a\left|\cos t \sin t\right| dt = 3a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 t \left|\cos t \sin t\right| dt =$$

$$= 3a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 t \left|\cos t\right| dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt - 3a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4 t \cos t dt = \left|d(\sin t) = \cos t dt\right| =$$

$$= 3a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d(\sin t) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4 t \cdot d(\sin t) \right) = 3a^2 \frac{\sin^5 t}{5}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3a^2 \frac{\sin^5 t}{5}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$\frac{3a^2}{5}+\frac{3a^2}{5}=\frac{6a^2}{5}$. Для знаходження ординати центра ваги верхньої частини астроїди скористаємося формулою: $\overline{y}=\frac{M_x}{l}$, тоді: $\overline{y}=\frac{6a^2}{5}:3a=\frac{2a}{5}$.

Відповідь: $(0;\ 0,4a)$.

Питання щодо центру ваги певної фігури, обмеженої криволінійною трапецією, розглядають з боку системи матеріальних точок, з яких вона складається, і тих мас, що в них зосереджені. Очевидно, що кількість цих точок наближається до безкінечності. Припустимо також, що по площині фігури вище означені маси розподілені рівномірно, таким чином, що їх поверхнева густина ρ, тобто маса, що приходиться на одиницю площі, є постійною величиною.

Отже, центр ваги плоскої абсолютно тонкої фігури можна визначити як точку, якій притаманна така властивість, що коли в ній зосередити усю масу системи, то її статичний момент відносно будь-якої осі буде дорівнювати відповідному статичному моменту усієї системи.

Нехай $(\overline{x};\ \overline{y})$ – координати центру ваги однорідної (з точки зору густини) криволінійної трапеції (плоскої фігури). Тоді:

$$\overline{x}=\frac{1}{S}\int_a^b x\,dS=\frac{1}{S}\int_a^b x\cdot y(x)\,dx=\frac{\int_a^b x\cdot y(x)\,dx}{\int_a^b y(x)\,dx}$$

$$\overline{y}=\frac{1}{2S}\int_a^b y(x)\,dS=\frac{1}{2S}\int_a^b y^2(x)\,dx=\frac{\int_a^b y^2(x)\,dx}{\int_a^b y(x)\,dx}.$$

де $dS=y(x)dx$, а S – площа плоскої фігури.

Приклад 53. Знайти координати центру ваги фігури, обмеженої дугою еліпса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, розташованої в першій чверті, і осями координат.

Розв'язання. У першій чверті при зростанні x від 0 до a величина t зменшується від $\frac{\pi}{2}$ до 0; тому

$$\overline{x} = \frac{1}{S}\int_0^a xydx = \frac{1}{S}\int_{\frac{\pi}{2}}^{a} a\cos t b\sin t\left(-a\sin t\right)dt = \frac{a^2b}{S}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos tdt =$$

$$= \frac{a^2b}{S}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 td\sin t = \frac{a^2b}{S}\frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2b}{3S}.$$

Скориставшись формулою площі еліпса $S = \pi ab$, отримуємо: $\overline{x} = \frac{4a^2b}{3\pi ab} = \frac{4a}{3\pi}$.

Аналогічно знаходимо ординату центру ваги:

$$\overline{y} = \frac{1}{2S}\int_0^a y^2dx = \frac{1}{2S}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b^2\sin^2 t\left(-a\sin t\right)dt = \frac{2ab^2}{\pi ab}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1-\cos^2 t\right)d\left(\cos t\right) =$$

$$= \frac{2b}{\pi}\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{4b}{3\pi}.$$

Відповідь: $\left(\frac{4a}{3\pi};\ \frac{4b}{3\pi}\right)$.

Приклад 53. Знайти координати центру ваги плоского півкола, що має радіус 3π. Густину вважати постійною.

Розв'язання. Півколо з прямою $y = 0$ утворюють криволінійну трапецію (рис. 44). Знайдемо у явному вигляді рівняння кривої, що обмежує її зверху при умові, що $y \ge 0$: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, де R – радіус кола. Підставимо до формул центра ваги плоскої фігури отримані дані.

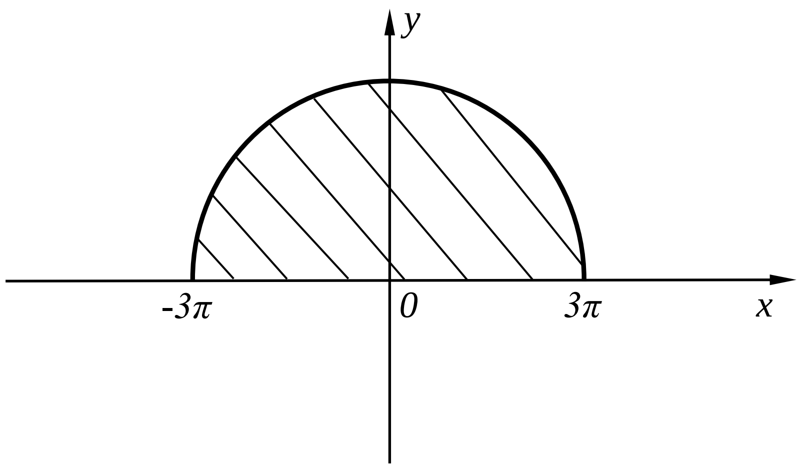


Рис. 44 Верхня частина півкола з радіусом 3π

Якщо, ще до підстановки кількісних значень радіуса обчислити інтеграл $\int\limits_{-R}^{R} x\sqrt{R^2-x^2}\cdot dx$, який входить до формули для знаходження координати $\overline{x}$, виходить, що він дорівнює нулю. Отже, координата $\overline{x}$ центру ваги також дорівнює 0. Аналогічний результат випливає також з того, що півколо є симетричним відносно осі ординат.

Знайдемо ординату $\overline{y}$, замість $\int\limits_a^b y(x)dx$ підставляючи площу півкола:

$$\overline{y}=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2(x)dx}{\int\limits_a^b y(x)dx}=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_{-3\pi}^{3\pi}\left(R^2-x^2\right)dx}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\frac{\left.\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-3\pi}^{3\pi}}{\pi R^2}=\frac{36\pi^3}{9\pi^3}=4.$$

Відповідь: $(0;\ 4)$.

Робота змінної сили, кінетична та потенційна енергія

Задача про роботу змінної сили

Якщо матеріальна точка під дією сили F, що не змінюється ні за величиною, ні за спрямуванням, перемістилася на відстань l у напрямі дії цієї сили, то робота сили, як відомо з механіки, дорівнює добутку величини сили F на переміщення l, тобто

$$E = F \cdot l.$$

Нас цікавить випадок, коли сила F змінюється по своїй чисельній величині, хоча і зберігає постійний напрям. Нехай під дією цієї сили матеріальна точка переміщується по прямій, уздовж лінії дії сили, треба обчислити роботу сили F.

Будемо вважати вісь Ox за пряму, вздовж якої переміщується матеріальна точка. Нехай початкова і кінцева точки шляху мають абсциси a і b $(a < b)$. У кожній точці проміжку $[a; b]$ величина сили має певне значення, тобто є деякою функцією абсциси: $F = f(x)$. Цю функцію будемо вважати безперервною. Розіб'ємо проміжок $[a; b]$ між початковою і кінцевою точкою шляху на n досить малих відрізків (рис. 45):

$[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{i-1}, x_i]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$. Отже, $a = x_0$, $b = x_n$, $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, ..., $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ..., $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$.

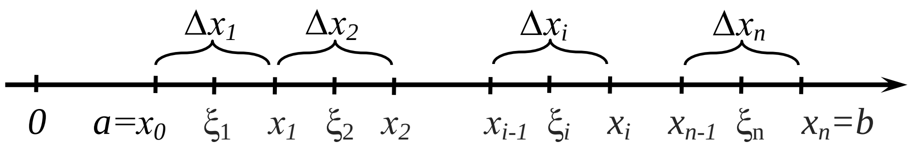


Рис. 45 Розбиття проміжку $[a; b]$ на малі відрізки

Робота на всьому шляху $[a; b]$ дорівнює сумі робіт на всіх малих ділянках шляху. Позначивши шукану роботу на всьому шляху через E, а роботу на малій ділянці $[x_{i-1}, x_i]$ – через ΔE_i, маємо, що $E = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta E_i$.

Проте визначити роботу на малій ділянці так само важко, як на всьому шляху, оскільки сила не постійна. Однак, якщо відрізки $[x_{i-1}, x_i]$ розбиття брати досить дрібними, то внаслідок припущення про безперервність функції

$F=f\left(x\right)$ – сила на кожному з малих дільниць шляху зміниться несуттєво. Оберемо на кожному дрібному відрізку $\left[x_{i-1};\, x_i\right]$ довільну точку ξ_i $(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i)$, припускаючи при цьому, що величина дії сили має постійне значення, яке дорівнює її значенню в точці ξ_i, тобто $F_i=f\left(\xi_i\right)$. Відтак, робота сили на відрізку шляху $\left[x_{i-1};\, x_i\right]$ згідно з вище наведеною формулою буде дорівнювати $F_i\cdot\Delta x_i=f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i$.

Але в дійсності на частинному відрізку шляху $\left[x_{i-1};\, x_i\right]$ сила непостійна, тому вираз $f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$ дає нам лише наближене значення роботи на цій маленькій ділянці. Таким чином, $\Delta E\approx f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$. Тоді на всьому шляху $\left[a;\, b\right]$: $E\approx\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\cdot\Delta x_i$.

Ця наближена рівність буде тим точніше, чим менше Δx_i. Тому за точне значення роботи природно прийняти границю означеної суми за умови, що найбільша довжина малих переміщень – λ, прагне до нуля, а саме:

$$E=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\cdot dx\ .$$

Приклад 54. *Задача про роботу, виконану при будівництві піраміди Хеопса.*

Піраміда Хеопса (рис. 46) є чотирикутною і має приблизно такі розміри: висота – 140 м, ребро основи – 200 м. Вважаючи, що піраміда є правильною, а густина каміння, з якого вона зроблена, приблизно дорівнює – $2{,}5\cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, обчислити роботу A, витрачену на подолання сили тяжіння при її побудові.

Розв'язання. Виділимо двома площинами паралельними до основи елементарний об'єм піраміди, що знаходиться на висоті – x (рис. 47).

Виходячи з того, що ΔABC подібний до ΔNBM знаходимо, що ширина виділеного перерізу дорівнює:

Рис. 46 Реальний вигляд піраміди Хеопса

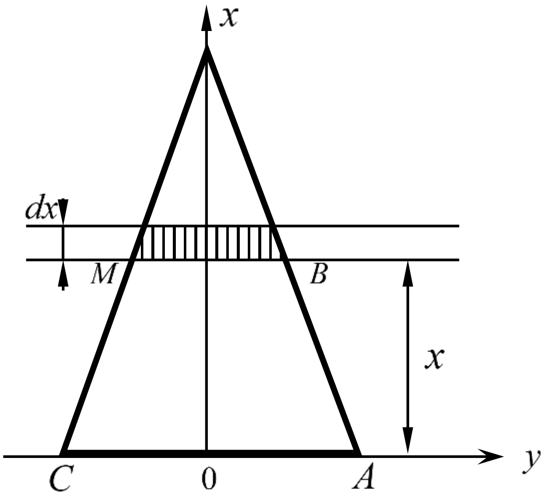


Рис. 47 Схематичне зображення піраміди

$$\frac{MN}{AC}=\frac{OB-x}{OB};\quad \frac{MN}{a}=1-\frac{x}{H};\quad MN=a\cdot(1-\frac{x}{H})$$

Загальна формула для знаходження роботи:

$A=Fh$, де $F=mg$ – сила тяжіння, h – висота, на яку підіймають вантаж.

Припустимо, що dP – вага шару каменю висотою dx. Тоді:

$F=mg=\rho Vg=\gamma V$, де $\gamma=\rho g$ – питома вага каменю; $dP=\gamma\cdot dV$.

Нехай dA – елементарна робота, тобто робота, яку необхідно витратити, щоб підняти шар каменю вагою dP на висоту h. Оскільки, $h=x$, то: $dA=\gamma\cdot dV\cdot xdx$.

Виразимо елементарний об’єм піраміди через відповідну площу її перерізу: $dV=S(x)\cdot dx$; $dV=MN^2dx$. Отже, елементарний об’єм перерізу дорівнює: $dV=a^2\left(1-\frac{x}{H}\right)^2 dx$.

Тоді робота, витрачена на підняття елементарного об'єму на висоту x, буде дорівнювати: $dA = \gamma a^2 \left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 x dx$.

Інтегруючи останній вираз в межах від 0 до H, обчислимо роботу, витрачену на подолання сили тяжіння при піднятті каміння:

$$A = \gamma a^2 \int_0^H \left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 x dx.$$

Обчисливши визначений інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца, отримаємо:

$$A = \gamma a^2 \int_0^H \left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 x dx = \gamma a^2 \int_0^H \left(1 - 2\frac{x}{H} + \frac{x^2}{H^2}\right) x \cdot dx = \gamma a^2 \int_0^H \left(x - 2\frac{x^2}{H} + \frac{x^3}{H^2}\right) \cdot dx =$$

$$= \gamma a^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{H} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{H^2}\right)\Bigg|_0^H = \gamma a^2 \left(\frac{H^2}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{H} + \frac{1}{4} H^2\right) =$$

$$= \gamma a^2 \cdot \frac{6H^2 - 8H^2 + 3H^2}{12} = \frac{1}{12} \gamma a^2 H^2.$$

Підставляємо задані параметри піраміди в отриману формулу:

$$A = \frac{1}{12} \cdot 2{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 200^2 \cdot 140^2 \approx 1{,}602 \cdot 10^{12}.$$

Відповідь: $1{,}602 \cdot 10^{12}$ Дж.

Приклад 55. *Задача про випаровування і роботу сили тяжіння.*

Капля з початковою масою $M = 0{,}05\,(\text{г})$ падає вертикально вниз під дією сили тяжіння F і рівномірно випаровується (рис. 48), втрачаючи масу зі швидкістю $V_m = 0{,}001$ (грам за секунду). Яка виконується робота A силою тяжіння під час руху краплі до цілковитого випаровування?

Розв'язання. Побудуємо вісь t з началом відліку часу в початковій точці руху краплі (рис. 49). Нехай M – початкова маса краплі, V_m –

швидкість її випаровування за одиницю часу, яка вимірюється у $\frac{г}{с}$. Відтак, крапля рухається за законом $m(t) = M - V_m \cdot t$. Наведена формула демонструє залежність зміни маси краплі від часу, що пройшов з початкового моменту t_0, тобто показує значення маси m в певний момент часу t, вимірюється у грамах ($г$).

За умовою наприкінці руху $m = 0$, тоді $t = \frac{M}{V_m}$. Позначимо роботу виконану за цей час $A(t)$. Оберемо досить малий елементарний проміжок часу Δt, на якому масу і шлях можна вважати постійними.

Рис. 48 Рух краплі

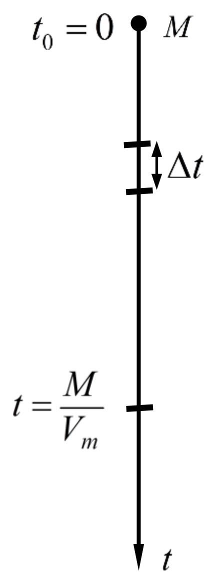


Рис. 49 Схема руху краплі

Робота розраховується за формулою: $A = F \cdot s$, де $F = mg$, $s = \frac{gt^2}{2}$.

Робота на елементарному проміжку часу: $dA = F \cdot ds$. Тоді, всю роботу здійснювану при переміщенні каплі можна розрахувати як суму від всіх елементарних робіт, застосовуючи наступним чином визначений інтеграл:

$A = \int\limits_0^{\frac{M}{V_m}} F(t) \cdot ds$, $ds = d\left(\frac{gt^2}{2}\right) = gtdt$. Отже: $A = \int\limits_0^{\frac{M}{V_m}} F(t) \cdot g \cdot t \cdot dt$. Підставляючи у формулу ваги краплі вираз для обчислення маси отримаємо $F = (M - V_m \cdot t)g$.

Згідно вище наведених математичних викладок отримуємо формулу для обчислення роботи: $A = \int\limits_0^{\frac{M}{V_m}} (M - V_m \cdot t)g^2 t \cdot dt$.

Незмінні величини, відповідно до властивостей визначеного інтегралу, виносимо за його знак, а із змінною t виконуємо алгебраїчні перетворення, тоді: $A = g^2 \cdot \int\limits_0^{\frac{M}{V_m}} (Mt - V_m t^2)dt$.

Обчислюємо визначений інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца: $A = g^2 \cdot \left(\frac{M \cdot t^2}{2} - \frac{V_m \cdot t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{M}{V_m}} = g^2 \cdot \left(\frac{M^3}{2V_m^{\ 2}} - \frac{M^3}{3V_m^{\ 2}}\right) = \frac{g^2 M^3}{6V_m^{\ 2}}$. Перевіримо одиницю вимірювання роботи згідно формули отриманої у результаті розрахунку: $\left[\frac{(\text{м}^2/\text{с}^4)\times\text{кг}^3}{\text{кг}^2/\text{с}^2} = \frac{\text{кг}\times\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж}\right]$.

Нарешті підставляємо конкретні значення параметрів відповідно до умови завдання у підсумкову формулу. Отримуємо наступний результат: $A = \frac{9{,}81^2 \cdot 0{,}05^3}{6 \cdot 0{,}001^2} \approx \frac{96{,}24 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-6}} \approx 2005$ (Дж).

Відповідь: 2005 (Дж).

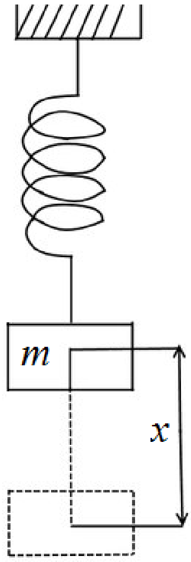
Приклад 56. *Задача про знаходження роботи, яка здійснюється силою пружності.*

Пружина амортизатора (рис. 50 а) у ході випробування деформується на $0,02$ м під дією сили в 60 Н. Яку роботу виконує пружина, деформуючись на $0,12$ м?

Розв'язання. Пружна сила з якою діє пружина на тіло, підпорядковується закону Гука, згідно з яким: $F = kx$, де k – коефіцієнт пропорційності, а x – подовження пружини (рис. 50 б).

Оскільки при деформації на $0,02$ м сила за умовою завдання дорівнює 60 Н, то можна знайти k із рівняння: $60 = k \cdot 0,02$, і отримаємо $k = \dfrac{60}{0,02} = 3000\ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$. Відтак, $k = 3000\ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$. Підставляємо знайдене значення k у формулу для обчислення сили, тоді: $F(x) = 3000x$.

(а) Дослідний зразок



(б) Схема випробування

Рис. 50 Автомобільний амортизатор

Робота обчислюється за формулою: $A = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot dx$

Враховуючи, що за умовою $x \in [0;\ 0,12]$, обираємо границі інтегрування від $x_1 = 0$ до $x_2 = 0,12$. Таким чином:

$$A = \int\limits_{0}^{0,12} 3000x \cdot dx = 3000 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,12} = 21,6\ \text{Дж}.$$

Відповідь: $A = 21{,}6$ Дж.

Приклад 57. Дерев'яний плавок еліпсоїдної форми з висотою $H = 6$ см, знаходиться на поверхні води (рис. 51). Густина деревини, з якої його виготовлено складає: $\rho = 0{,}8 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Геометричні параметри плавка наступні: напіввісь $a = 2$ см; напіввісь $b = 2$ см; напіввісь $c = 3$ см, де c – половина висоти плавка. Яку роботу повинен виконати рибалка, щоб витягнути плавок з води?

Розв'язання. На підставі закону Архімеда: «на будь-яке тіло, занурене в рідину, діє виштовхувальна сила, яка дорівнює вазі витисненої даним тілом рідини». Відтак, знайдемо висоту зануреної частини плавка. Його вагу знаходимо за формулою: $P_n = m_n \cdot g = \rho_\partial \cdot V_n \cdot g$, де: m_n – маса плавка, ρ_∂ – густина деревини, V_n – об'єм плавка, g – прискорення вільного падіння, $g \approx 9{,}81$. Об'єм еліпсоїда: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c$, якщо його задано канонічним рівнянням: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Тоді: $P_n = \frac{4}{3} \cdot \rho_\partial \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c \cdot g$. Виштовхувальна сила буде дорівнювати: $F_{Apx} = \rho_в \cdot g \cdot V_{зан.}$, де: $\rho_в$ – густина води, g – прискорення вільного падіння, $V_{зан.}$ – об'єм зануреної частини плавка. Оскільки, $P_n = F_{Apx}$, то: $\frac{4}{3} \cdot \rho_\partial \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c = \rho_в \cdot V_{з.ч.}$. Об'єм зануреної частини ($V_{зан.}$) отримаємо, підсумовуючи площі перерізів по всій довжині зануреного плавка (рис. 52). Для цього інтегруємо функцію, що задає площу перерізу еліпсоїда, який представляє собою еліпс ($S_{пер.}$), від нижньої зануреної точки плавка $(-c)$, до шуканого значення висоти, на якій плавок виринає з води, тобто глибини занурення ($H_{зан.}$):

$$V_{зан.} = \int_{-c}^{H_{зан.}} S_{пер.} \cdot dy .$$

Площу перерізу $\left(S_{пер.}\right)$ знайдемо за формулою площі еліпса: $S_{пер.} = \pi \cdot x \cdot y$, де x, y – напіввісі еліпса, довжина яких буде змінюватися в залежності від значення висоти плавка, тобто координати z. Для того щоб отримати ці значення у кожному конкретному випадку, потрібно мати залежність між змінними x та y від z: $x = a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$ та $y = b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$.

Тоді: $\frac{4}{3} \cdot \rho_д \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c = \pi \cdot a \cdot b \cdot \rho_в \int_{-c}^{H_{зан.}} \left(1-\frac{z^2}{c^2}\right) \cdot dz$;

$\frac{4}{3} \cdot \rho_д \cdot c = \rho_в \int_{-c}^{H_{зан.}} \left(1-\frac{z^2}{c^2}\right) \cdot dy$; $\frac{4 \cdot \rho_д \cdot c}{3\rho_в} = \left(z-\frac{z^3}{3c^2}\right)\Bigg|_{-c}^{H_{зан.}}$;

$\frac{4 \cdot \rho_д \cdot c}{3\rho_в} = \left(H_{зан.}-\frac{H_{зан.}^3}{3c^2}\right) - \left(-c+\frac{c^3}{3c^2}\right)$; $27H_{зан.} - H_{зан.}^3 = 27 \cdot 1{,}2$;

$H_{зан.}^3 - 27H_{зан.} + 32{,}4 = 0$.

Рис. 51 Плавок на воді

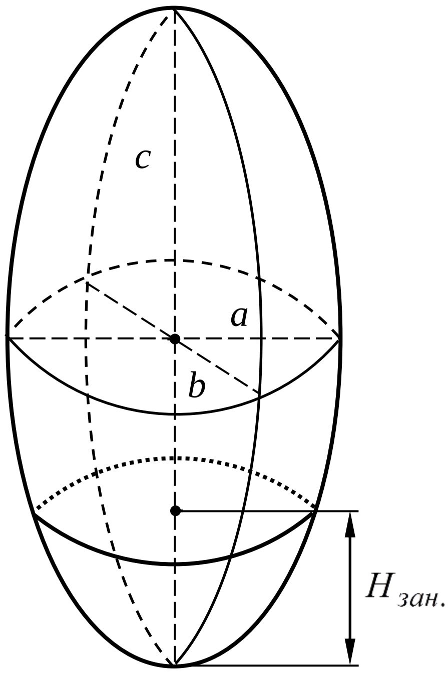


Рис 52 Параметри плавка

Обчислення визначеного інтегралу за допомогою формули Ньютона-Лейбніца, та розв'язок кубічного рівняння дозволили отримати глибину занурення: $H_{зан.} = 1,28$ см.

Кількісне значення сили F, яка виконує роботу по вилученню плавка з води буде дорівнювати різниці між його вагою і виштовхувальною силою, що діють на плавок:

$$F = P_n - F_{Арх} = \frac{4}{3} \cdot \rho_д \cdot g \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c - \rho_в \cdot g \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Рибалка починає витягувати плавок з води від аплікати $z = 0$, закінчуючи глибиною занурення, що відповідає аплікаті $z = 1,28$. Відтак, робота по витягуванню плавка з води:

$$A = \int_H^0 F \cdot dh = \int_{H_{зан.}}^0 \left(\frac{4}{3} \cdot g \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c - \rho_в \cdot g \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)\right) \cdot dz.$$

Розіб'ємо інтеграл на 2 інтеграли, а незмінні величини, відповідно до властивостей визначеного інтегралу, виносимо за його знак, тоді:

$$A = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot g \cdot \rho_д \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \int_{H_{зан.}}^0 dz - \rho_в \cdot g \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot \int_{H_{зан.}}^0 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz.$$

За формулою Ньютона-Лейбніца:

$$A = \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot g \cdot \rho_д \cdot a \cdot b \cdot c \cdot h - \rho_в \cdot g \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot \left(\text{z} - \frac{z^3}{3 \cdot c^2}\right)\right)\Bigg|_{H_{зан.}}^0 =$$

$$= \rho_в \cdot g \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot \left(H_{зан.} - \frac{H_{зан.}^3}{3 \cdot c^2}\right) - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot g \cdot \rho_д \cdot a \cdot b \cdot c \cdot H_{зан.}.$$

Використаємо конкретні значення відповідно до умови завдання, тоді:

$$A = 3,14 \cdot 9,81 \cdot 0,02 \cdot 0,02 \cdot \left(1,28 - \frac{2,1}{27}\right) - \frac{4}{3} \cdot 800 \cdot 9,81 \cdot 3,14 \cdot 0,02 \cdot 0,03 \cdot 0,02 \cdot 1,28 =$$

$$= 1,014 - 0,505 = 0,509.$$

Відповідь: $0,509$ Дж.

Приклад 58. *Задача про роботу по подоланню сили тяжіння.*

Визначити роботу (в джоулях), виконувану при підйомі супутника з поверхні Землі (рис. 53) на висоту $H = 250$ км. Маса супутника $m = 7$ т, радіус Землі $R_З = 6380$ км. Прискорення вільного падіння g біля поверхні Землі вважати рівним $g = 9{,}8\ \frac{м}{с}$.

Розв'язання. За законом всесвітнього тяжіння, сила, що діє на супутник: $F = G\frac{M_З\,\mathrm{m}}{R^2}$, де $R = R_З + H$ – відстань між центром Землі та супутником, Н – висота супутника над поверхнею Землі, G – гравітаційна стала $\left(G = 6{,}67408(31)\cdot 10^{-11}\,\frac{м^3}{кг\times с^2}\right)$; $M_З$ – маса планети Земля $\left(M_З = 5{,}97219\cdot 10^{24}кг\right)$. Згідно міжнародної системи: $H = 250000$ м, $m = 7000$ кг, $R_З = 6380000$ м.

У формулі для розрахунку сили, яка притягує супутник до Землі чисельник і знаменник помножимо на $R_З^2$, тоді: $F = G\frac{M_З\,\mathrm{m}}{R_З^2}\cdot\frac{R_З^2}{R^2}$. Оскільки, $G\frac{M_З}{R_З^2} = g$ і $R = R_З + H$, то формула обчислення сили тяжіння набуває вигляду $F = mg\cdot\left(\frac{R_З}{R}\right)^2 = \frac{mgR_З^2}{(R_З + H)^2}$.

Супутник починає рухатися з поверхні Землі, тобто з точки $h = 0$, в точку $H = 250$ км прямолінійно під дією сили F (рис. 54). Її можна задати як функцію від координати h, тобто $F = f(h)$. Для того, щоб знайти роботу сили F на відрізку $[0;\ H]$ розіб'ємо даний відрізок на n дрібних відрізків точками $h_0 = 0 < h_1 < \cdots < h_{k-1} < h_k < \cdots < h_{n-1} < h_n = b$ і в кожному такому частинному відрізку $[h_{k-1};\ h_k]$ оберемо довільну точку $e_k\ (k \in \overline{1,n})$. Тоді робота сили на кожному відрізку $\left[h_{k-1};\, h_k\right]$ довжини Δh_k наближено дорівнює $f(e_k)\cdot\Delta h_k$.

На всій довжині шляху супутника $\left[0;\, H\right]$ роботу (A) можна наближено обчислити як інтегральну суму – $\sum_{k=1}^{n} f(e_k)\Delta h_k$ визначеного інтеграла.

Рис. 53 Рух супутника

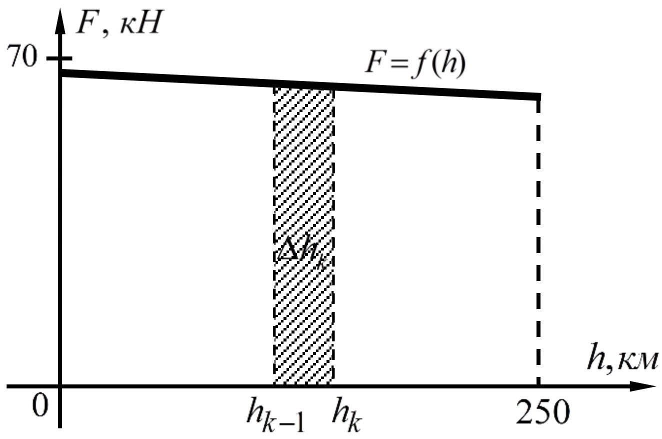


Рис. 54 Графік сили, що діє на супутник

Тоді робота дорівнює: $A=\int_0^H F dh=\int_0^H \frac{mgR_З^2}{(R_З+h)^2}dh$. Незмінні величини, відповідно до властивостей визначеного інтегралу, виносимо за його знак: $A=mgR_З^2\cdot\int_0^H \frac{dh}{(R_З+h)^2}$.

Обчисливши визначений інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца, отримаємо: $A=-mgR_З^2\cdot\left(\frac{1}{R_З+h}\right)\Bigg|_0^H=mgR_З^2\cdot\left(\frac{1}{R_З}-\frac{1}{R_З+H}\right)=$

$$=mgR_З^2\cdot\frac{R_З+H-R_З}{R_З(R_З+H)}=\frac{mgR_ЗH}{R_З+H}\ .$$

Підставляємо конкретні значення відповідно до умови завдання у підсумкову формулу. Отже,

$$A = \frac{7000 \cdot 9{,}8 \cdot 6380000 \cdot 250000}{6380000 + 250000} = \frac{11 \cdot 10^{16}}{6{,}6 \cdot 10^{6}} \approx 1{,}7 \cdot 10^{10}\,(\text{Дж}).$$

Відповідь: $1{,}7 \cdot 10^{10}$ Дж.

Приклад 59. *Задача про другу космічну швидкість.*

Визначити другу космічну швидкість, тобто мінімальну швидкість, з якою повинен рухатися супутник, щоб без витрат додаткової роботи здолати вплив поля тяжіння планети Земля, а саме віддалитися на нескінченно велику відстань від Землі. Якщо, маса супутника – $m = 7000$ кг, радіус Землі – $R_З = 6380000$ м, прискорення вільного падіння біля поверхні Землі – g вважаємо рівним $9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ (рис. 55).

Розв'язання. Робота, що здійснюється при переміщенні тіла уздовж радіуса в гравітаційному полі, визначається як інтеграл: $A = \int_{R_1}^{R_2} F(r) \cdot dr$, де R_1 – відстань між центром Землі та її поверхнею, R_2 – кінцева відстань між центрами мас тіл Землі та супутника. Оскільки друга космічна швидкість має забезпечити нескінченно велике віддалення супутника від планети, то $R_2 = \infty$ (рис. 56).

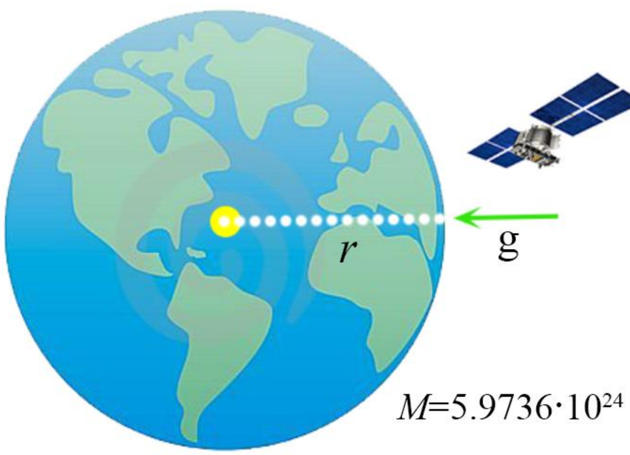


Рис. 55 Фактори, що впливають на другу космічну швидкість

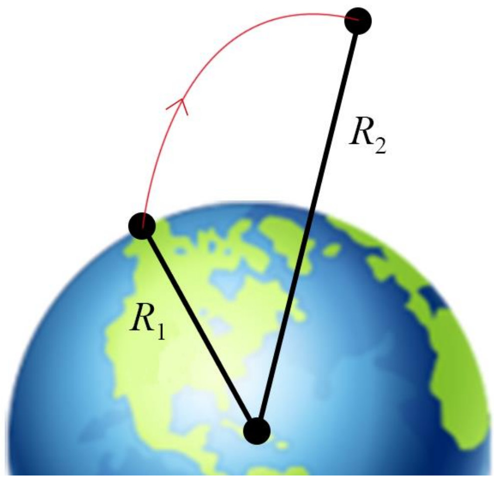


Рис. 56 Траєкторія руху супутника в гравітаційному полі

Тоді: $A = \int\limits_{R_3}^{\infty} \frac{GMm}{r^2} dr$, де G – гравітаційна стала, M – маса Землі, m – маса супутника, r – відстань між центрами мас тіл Землі та супутника. Згідно властивості визначеного інтегралу у формулі обчислення роботи винесемо константи за його знак. Отже, $A = GMm \int\limits_{R_3}^{h} \frac{1}{r^2} dr$. Обчислюємо невласний інтеграл першого роду: $A = GMm \int\limits_{R_1}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = GMm \cdot \lim\limits_{h \to \infty} \int\limits_{R_1}^{h} r^{-2} dr =$

$$= GMm \cdot \lim_{h \to \infty} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_{R_1}^{h} = GMm \cdot \lim_{h \to \infty} \left(-\frac{1}{h} + \frac{1}{R_1} \right) = \frac{GMm}{R_1}.$$

Як відомо, робота сили дорівнює зміні кінетичної енергії тіла (теорема про зміну кінетичної енергії тіла), тобто: $\frac{GMm}{R} = \frac{mv^2}{2}$. Звідси отримуємо формулу для обчислення другої космічної швидкості: $v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Підставляємо конкретні значення відповідно до умови завдання у отримину формулу:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot 5{,}9736 \cdot 10^{24}}{6380}} \approx 11{,}17765 \ \left(\frac{\text{км}}{\text{с}} \right).$$

Відповідь: $11{,}17765 \ \frac{\text{км}}{\text{с}}$.

Приклад 60. *Задача на знаходження роботи по викачуванню рідини із ємності, що має форму напівциліндра.*

Цистерну, яка має форму напівциліндра (рис. 57), заповнили водним розчином отрутохімікату. Довжина цистерни – $5\,\text{м}$, радіус основи – $4\,\text{м}$, густина розчину дорівнює 938 $\left(\text{кг/м}^3\right)$. Знайти роботу, яка має бути виконана, щоб викачати з цистерни увесь розчин.

Розв'язання. Розглянемо загальний випадок. Для того, щоб викачати розчин з ємкості (рис. 58), яка має форму напівциліндра з довжиною a, виділимо на глибині x горизонтальний шар рідини, шириною $m=2\sqrt{r^2-x^2}$ та товщиною dx. Тоді елементарний виділений шар отрутохімікату дорівнюватиме $dV=a\cdot m\cdot dx=2a\sqrt{r^2-x^2}dx$. Елементарна робота, по підняттю шару рідини на висоту x буде відповідно дорівнювати: $dA=2\rho\cdot g\cdot a\cdot x\sqrt{r^2-x^2}dx$, де ρ – густина наявного у цистерні розчину кг/м^3, g – прискорення вільного падіння – 9,81 м/с^2.

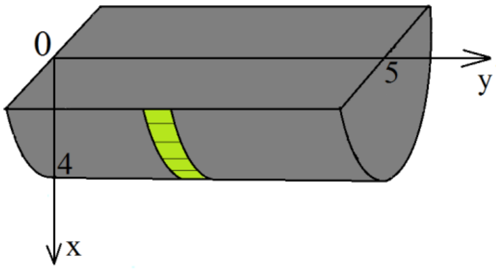


Рис. 57 Параметри цистерни

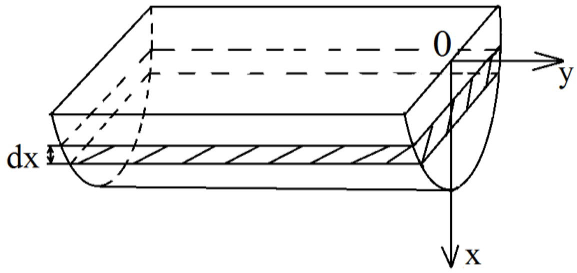


Рис. 58 Розташування системи координат

Керуючись формулою елементарної роботи та враховуючи той факт, що цистерна заповнена рідиною повністю, маємо наступні границі інтегрування: нижня – $r_1=0$, верхня – $r_2=4$. Отже,

$$A=2a\rho g\int_0^4 x\sqrt{r^2-x^2}dx=\left|d\left(r^2-x^2\right)=-2xdx\right|=2apg\int_0^4\left(-\frac{1}{2x}\cdot x\sqrt{r^2-x^2}\right)dx=$$

$$=2a\rho g\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^4-a\rho g\left(\frac{2}{3}\left(r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^4=\frac{3}{2}\rho g a r^3.$$

Підставляємо заданні параметри цистерни. Відтак:

$A=\frac{2}{3}\cdot 938\cdot 9{,}81\cdot 5\cdot 64=\frac{2}{3}\cdot 2944569{,}6=1963046{,}4$ (Дж). Для зручності, відповідь надамо у кДж .

Відповідь: $A=1963{,}05$ (кДж).

Приклад 61. *Задача про роботу по викачуванню рідини із резервуару конусоподібної форми.*

Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з питомою вагою $\gamma = 9810$ Н/м^3 із акваріуму, який має форму розташованого вершиною вниз конуса (рис. 59 *в*), висота основи якого дорівнює $H = 1{,}1$ м, а радіус основи дорівнює $R = 0{,}9$ м. Як зміниться результат, якщо конус перевернути вершиною догори (рис. 60)?

Розв'язання. Значення роботи A, яка витрачається на підняття будь-якого тіла, залежить від висоти (y) його підйому і ваги тіла P, а саме, $A = P \cdot y$. За умовою задачі, робота витрачена на підняття шару води висотою у є функцією – $A(y)$. Знайдемо диференціал цієї функції. При збільшенні y на значення dy (рис. 59 *а*) об'єм шару води збільшується на $\Delta V = \pi r^2 dy$, а його вага – на $\Delta P = \pi\gamma r^2 dy$. Отже, величина витраченої роботи збільшиться на $\Delta A = \pi\lambda r^2 y dy = \pi\gamma r^2 dA$, де $y \in [0;\ 1{,}1]$.

Відтак, значення роботи для першого випадку поставленого в завданні обчислюється за формулою: $A_1 = \int\limits_0^H \pi\gamma r^2 y dy$, $A_1 = \int\limits_0^{1{,}1} \pi\gamma r^2 y \cdot dy$.

Значення r знайдемо з подібних трикутників AOC і AQN (рис. 59 *б*):

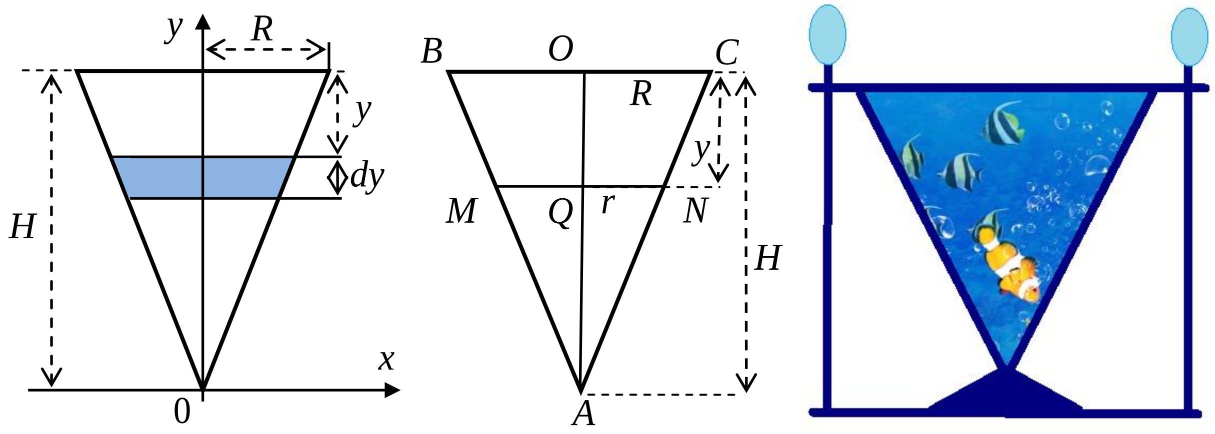
$$\frac{R}{r} = \frac{H}{H-y};\ r = \frac{R(H-y)}{H};\ r = \frac{0{,}9(1{,}1-y)}{1{,}1}.$$

Тоді у загальному випадку:

$$A_1 = \pi\gamma \int\limits_0^H \frac{R^2(H-y)^2}{H^2} y dy = \pi\gamma \frac{R^2}{H^2} \int\limits_0^H (H^2 y - 2Hy^2 + y^3) dy =$$

$$= \pi\gamma \frac{R^2}{H^2} \left(\mathrm{H}^2 \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^H - 2H \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^H + \frac{y^4}{4}\Bigg|_0^H \right) = \pi\gamma \frac{R^2}{H^2} \left(\frac{H^4}{2} - \frac{2H^4}{3} + \frac{H^4}{4} \right) =$$

$$= \pi\gamma \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{6H^4 - 8H^4 + 3H^4}{12} = \pi\gamma R^2 \frac{H^2}{12} \text{ (од. роботи).}$$



а *б* *в*

Рис. 59 Акваріум, конусоподібної форми (розташований вершиною униз): *а*) H – висота акваріуму; R – радіус основи конуса; y – загальна змінювана товщина шару води, яку потрібно викачати; dy – товщина елементарного шару води; *б*) подібні трикутники AOC і AQN; *в*) зовнішній вигляд акваріуму

Підставляючи параметри задані за умовою задачі, отримуємо:

$$A_1 = \pi \cdot 9810 \cdot \int_0^{1,1} \frac{0,81(1,1-y)^2}{1,21} y dy = \pi \cdot 9810 \cdot \frac{0,81}{1,21} \int_0^{1,1} \left(1,21y - 2,2y^2 + y^3\right) dy =$$

$$= \pi \cdot 9810 \cdot \frac{0,81}{1,21} \left(1,21 \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^{1,1} - 2,2 \frac{y^3}{3} \Bigg|_0^{1,1} + \frac{y^4}{4} \Bigg|_0^{1,1} \right) =$$

$$= \pi \cdot 9810 \cdot \frac{0,81}{1,21} \left(\frac{1,4641}{2} - \frac{2,9282}{3} + \frac{1,4641}{4} \right) =$$

$$= \pi \cdot 9810 \cdot \frac{0,81}{1,21} \cdot \frac{8,7846 - 11,7128 + 4,3923}{12} = \pi \cdot 9810 \cdot 0,81 \cdot \frac{1,21}{12} \approx 2,517 \text{ (кДж).}$$

Аналогічні розрахунки виконуємо для випадку, коли вершина конуса спрямована догори (рис. 60). Робота обчислюється за такою ж формулою, як і в першому випадку, а саме: $A_2 = \int_0^H \pi \gamma r^2 y dy$; $A_2 = \int_0^{1,1} \pi \gamma r^2 y dy$. Значення змінюваного в залежності від висоти радіусу – r знаходимо з подібних трикутників AOC і AQN (рис. 60 *б*):

$$\frac{r}{R}=\frac{y}{H}; \quad r=\frac{Ry}{H}; \quad r=\frac{0,9y}{1,1}.$$

Отже, у загальному випадку:

$$A_2=\pi\gamma\int_0^H \frac{R^2y^2}{H^2}ydy=\pi\gamma\frac{R^2}{H^2}\int_0^H y^3dy=\pi\gamma\frac{R^2}{H^2}\cdot\left.\frac{y^4}{4}\right|_0^H=\pi\gamma R^2\frac{H^2}{4} \text{ (од. роботи).}$$

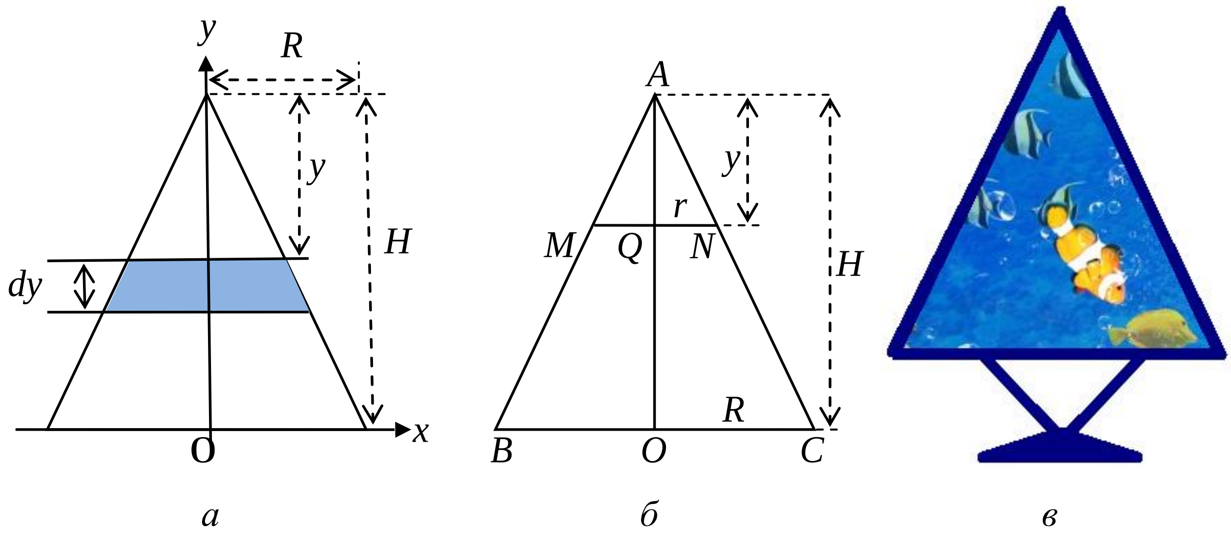


Рис. 60 Акваріум, конусоподібної форми (розташований вершиною вгору): *а*) H – висота акваріуму; R – радіус основи конуса; y – загальна змінювана товщина шару води, яку потрібно викачати; dy – товщина елементарного шару води; *б*) подібні трикутники AOC і AQN; *в*) зовнішній вигляд акваріуму

Підставляючи конкретні параметри за умовою задачі, отримуємо:

$$A_2=\pi\cdot 9810\int_0^{1,1}\frac{0,81y^2}{1,21}ydy=\pi\cdot 9810\cdot\frac{0,81}{1,21}\int_0^{1,1}y^3dy=\pi\cdot 9810\cdot\frac{0,81}{1,21}\cdot\left.\frac{y^4}{4}\right|_0^{1,1}=$$

$$=\pi\cdot 9810\cdot 0,81\cdot\frac{1,21}{4}\approx 7,551 \text{ (кДж).}$$

Перевіримо розмірність шуканої величини у системі СІ:

$$A=\left[\int_0^{м} \pi \times \frac{Н}{м^3} м^2 y dy\right]=\left[\pi \times \frac{Н}{м} \times \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{м}\right]=\left[\frac{\pi}{2} \times \frac{Н}{м} \times м^2\right]=[Н \times м]=[Дж].$$

Порівняємо значення роботи у першому і другому випадках:

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{7,551}{2,517} \approx 3.$$

Відтак, у першому випадку здійснено у 3 рази меншу роботу, ніж у другому. Тобто у першому випадку ми отримаємо виграш у роботі в 3 рази, порівняно з другим випадком. Отже, для того, щоб викачати воду із акваріуму, який має форму конуса, вигідно розташувати його вершиною вниз.

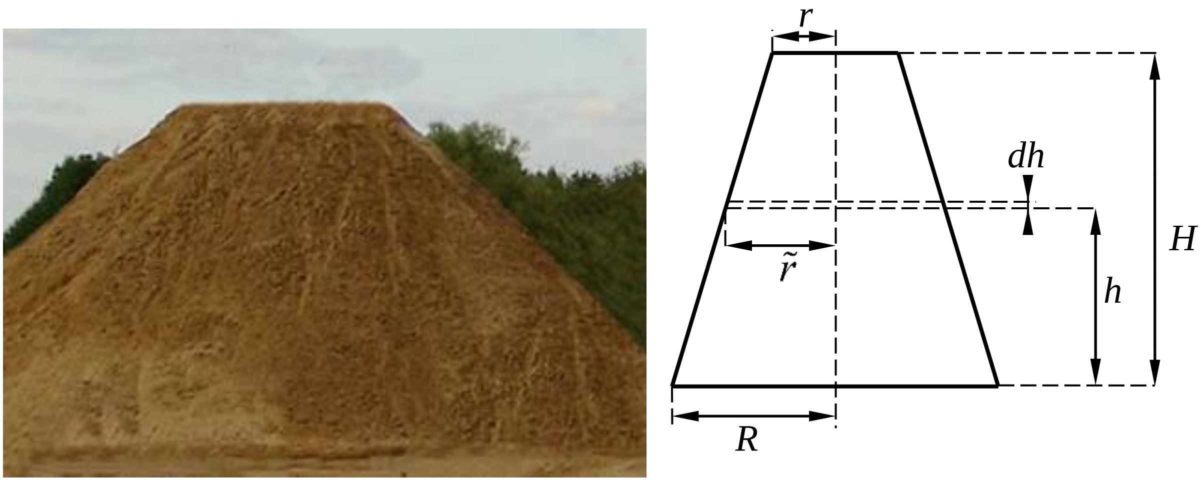
Відповідь: робота по викачуванню води з акваріуму конусоподібної форми у випадку, коли конус розташовано вершиною униз складає: $A_1=2,517$ кДж, вершиною догори – $A_2=7,551$ кДж, що фактично у 3 рази менше, чим у другому випадку; отже, з точки зору економії експлуатації, встановити акваріум першої форми вигідніше.

Приклад 62. *Задача про купу піску і потенційну енергію.*

Знайти роботу, яку потрібно виконати підйомнику для підняття купи піску (рис. 61) на висоту $l=10$ м, якщо після зняття частини піску з верхівки купи вона прийняла форму усіченого конуса з наступними параметрами: висота конуса – $H=6$ м, радіуси основ – $R=4$ м і $r=2$ м, густина піску $\rho=1500\ \frac{кг}{м^3}$.

Розв'язання. Робота, яку потрібно виконати, щоб підняти купу піску, дорівнює зміні повної енергії цієї купи. З огляду на те, що ця означена купа нерухома, можна зробити висновок, що повна енергія купи дорівнює її потенційній енергії. Отже, робота, яку потрібно виконати для підняття купи піску, дорівнює зміні її потенційної енергії.

З третьої ознаки подібності трикутників (рис. 61 б) отримуємо, що радіус перерізу конуса залежить від висоти, на якій цей переріз знаходиться, таким чином: $\tilde{r}(h) = r + \dfrac{R-r}{H}(H-h)$. Отже площа перерізу також залежить від цієї висоти: $S(h) = \pi\left(\tilde{r}\left(h\right)\right)^2$.



а б

Рис. 61 а) реально можливий вигляд купи піску, про яку йдеться у задачі; б) схематичне зображення купи піску: R і r – радіуси нижньої і верхньої основ конуса відповідно, H – висота конуса; dh – висота елементарного об'єму піску; h – висота, на якій знаходиться цей елементарний об'єм, $\tilde{r}$ – радіус перерізу елементарного шару піску

Розіб'ємо відрізок $\left[0; H\right]$ на n однакових відрізків довжиною dh. Елементарний об'єм піску висотою dh, який знаходиться на висоті, h буде таким: $dV = S(h)\cdot dh$; елементарна маса піску, що обумовлює силу, яку треба долучити до цієї елементарної маси, щоб зрушити з місця пісок: $dm = \rho dV$.

Потенційна енергія піску з елементарною масою dm на висоті h:

$$dW = dm \cdot g \cdot h = \rho \cdot h \cdot g \cdot dV = \rho \cdot g \cdot h \cdot S(h) \cdot dh = \pi\rho gh\left(r + \frac{R-r}{H}\left(H-h\right)\right)^2 dh.$$

Отже, сума усіх таких енергій для кожної елементарної маси буде такою: $\sum_{i=1}^{n}\pi\rho gh\left(r+\frac{R-r}{H}(H-h)\right)^2 dh$.

Для отримання точної формули перейдемо до границі, збільшуючи число дроблень – $n\to\infty$, тим самим нескінченно подрібнюючи самі інтервали dh:

$$W=\lim_{dh\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi\rho gh\left(r+\frac{R-r}{H}(H-h)\right)^2 dh=\int_0^H\pi\rho gh\left(r+\frac{R-r}{H}(H-h)\right)^2 dh.$$

Відтак, потенційна енергія, яку має купа піску, що стоїть на землі, обчислюється за формулою:

$$W_0=\int_0^H\pi\rho gh\left(r+\frac{R-r}{H}(H-h)\right)^2 dh=$$

$$=\pi\rho g\int_0^H\left(r^2h+2r\frac{R-r}{H}(H-h)h+\left(\frac{R-r}{H}\right)^2(H-h)^2h\right)dh=$$

$$=\pi\rho g\left(\frac{r^2h^2}{2}+\frac{2r(R-r)}{H}\left(H\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{3}\right)+\left(\frac{R-r}{H}\right)^2\cdot\left(H^2\frac{h^2}{2}-2H\frac{h^3}{3}+\frac{h^4}{4}\right)\right)\Bigg|_0^H=$$

$$=\pi\rho g\left(\frac{r^2H^2}{2}+\frac{2r(R-r)}{H}\left(H\frac{H^2}{2}-\frac{H^3}{3}\right)+\left(\frac{R-r}{H}\right)^2\left(H^2\frac{H^2}{2}-2H\frac{H^3}{3}+\frac{H^4}{4}\right)\right).$$

Якщо купу піску піднято на висоту l, тоді:

$$W_1=\int_0^H\pi\rho g(h+l)\left(r+\frac{R-r}{H}(H-h)\right)^2 dh=$$

$$=\pi\rho g\int_0^H\left(r^2(h+l)+2r\frac{R-r}{H}(H-h)(h+l)+\left(\frac{R-r}{H}\right)^2(H-h)^2(h+l)\right)dh=$$

$$=\pi\rho g\left(\frac{r^2h^2}{2}+r^2lh+\frac{2r(R-r)}{H}\left(H\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{3}+Hlh-l\frac{h^2}{2}\right)+\left(\frac{R-r}{H}\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\left(H^2\frac{h^2}{2}-2H\frac{h^3}{3}+\frac{h^4}{4}+H^2lh-h^2Hl+l\frac{h^3}{3}\right)\right)\Bigg|_0^H=$$

$$=\pi\rho g\left(\frac{r^2H^2}{2}+r^2lH+\frac{2r\left(R-r\right)}{H}\left(H\frac{H^2}{2}-\frac{H^3}{3}+HlH-l\frac{H^2}{2}\right)+\left(\frac{R-r}{H}\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\left(H^2\frac{H^2}{2}-2H\frac{H^3}{3}+\frac{H^4}{4}+H^2lH-H^2Hl+l\frac{H^3}{3}\right)\right).$$

Таким чином, робота, яку потрібно знайти обчислюється за формулою:

$$A=W_1-W_0=\pi\rho g\left[\frac{r^2H^2}{2}+r^2lH+\frac{2r\left(R-r\right)}{H}\left(H\frac{H^2}{2}-\frac{H^3}{3}+HlH-l\frac{H^2}{2}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{R-r}{H}\right)^2\left(H^2\frac{H^2}{2}-2H\frac{H^3}{3}+\frac{H^4}{4}+H^2lH-H^2Hl+l\frac{H^3}{3}\right)-$$

$$\left.-\left(\frac{r^2H^2}{2}+\frac{2r\left(R-r\right)}{H}\left(H\frac{H^2}{2}-\frac{H^3}{3}\right)+\left(\frac{R-r}{H}\right)^2\left(H^2\frac{H^2}{2}-2H\frac{H^3}{3}+\frac{H^4}{4}\right)\right)\right]=$$

$$=\pi\rho g\left(r^2lH+\frac{2r(R-r)}{H}l\frac{H^2}{2}+\left(\frac{R-r}{H}\right)^2l\frac{H^3}{3}\right)=\pi\rho g\left(\frac{rRlH}{3}+\frac{R^2lH}{3}+\frac{r^2lH}{3}\right)=$$

$$=\frac{\pi\rho glH}{3}\left(rR+R^2+r^2\right).$$

Підставляючи числові значення, отримуємо:

$$A=\frac{3{,}14\cdot1500\cdot9{,}81\cdot10\cdot6}{3}\cdot(4\cdot2+16+4)=314\cdot15\cdot9{,}81\cdot560=25874856\ (\text{Дж})\approx$$

$$\approx 25{,}9\ (\text{МДж}).$$

Відповідь: 25,9 МДж.

Приклад 63. *Задача про кінетичну енергію диска, що обертається.*

Один з двох візків трамвайного вагону має 4 однакових колеса. Одне колесо (рис. 62) масою $m=150$ кг та радіусом $r=350$ мм, обертається із кутовою швидкістю $\omega=14\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, навколо вісі, що проходить через його центр перпендикулярно до його площини. Яку кінетичну енергію $E_{кін}$ має таке колесо, якщо його вважати однорідним диском? Наявністю реборди можна знехтувати.

Розв'язання. Побудуємо вісі Ox та Oy, таким чином, як показано на рис. 63, тобто означені вісі перетинаються у центрі колеса.

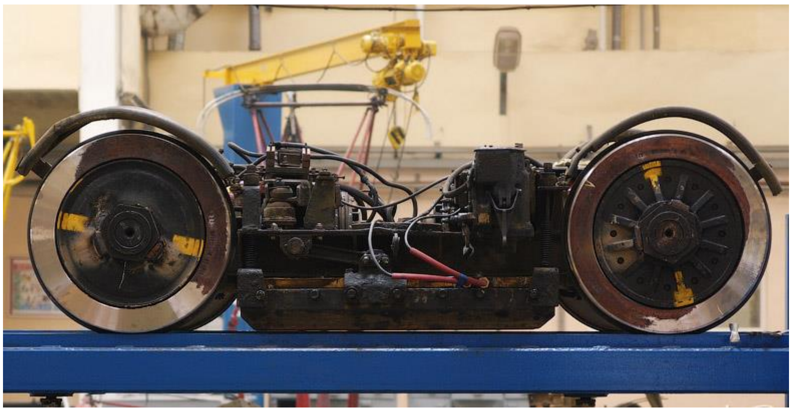


Рис. 62 Візок трамвайного вагону

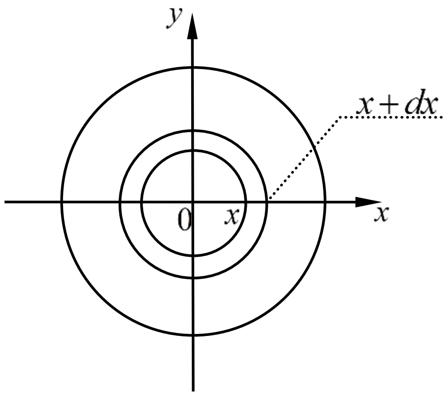


Рис. 63 Модель колеса

Для обертального руху тіла навколо нерухомої осі кінетична енергія обчислюється за формулою: $E_{кін} = \dfrac{J\omega^2}{2}$, де J – момент інерції відносно осі обертання – $J = mr^2$, ω – кутова швидкість. Момент інерції не є постійним для кожної точки площини колеса, і змінюється для кожної $i-$ї точки залежно від її відстані – $r_i = x$ від центру обертання. Тому розглянемо досить мале елементарне кільце ширини dx, тобто з внутрішнім радіусом – x, а зовнішнім – $x + dx$. Для такого кільця його елементарний момент інерції:

$J_i = m_i \cdot r_i^2$, де $m_i = \rho \cdot V_i$, ρ – густина однорідного кільця, є величиною сталою.

Площа кільця: $S_i = \pi\left((x+dx)^2 - x^2\right) = \pi(x^2 + 2\pi x + dx^2 - x^2) = 2\pi x \cdot dx$.

Тоді, $V_i = 2\pi xh \cdot dx$ – елементарний об'єм, де h – висота (товщина) кільця; $J_i = \rho \cdot x^2 \cdot 2\pi xh \cdot dx = 2\pi\rho \cdot h \cdot x^3 dx$.

Тоді елементарна кінетична енергія $dE_{кін} = \dfrac{\omega^2}{2} \cdot \rho \cdot h \cdot 2\pi x^3 dx$. Всю кінетичну енергію, що має колесо при обертанні можна розрахувати як суму від всіх елементарних кінетичних енергій, застосовуючи наступним чином визначений інтеграл, який обчислюємо за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$E_{кін} = \int_0^r dE_{кін} = \int_0^r \frac{\omega^2}{2} \cdot \rho \cdot h \cdot 2\pi x^3 dx = \omega^2 \pi \cdot \rho h \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^r = \pi \cdot \rho h r^2 \cdot \frac{\omega^2 r^2}{4};$$

$\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{\pi r^2 h}$, тому $\pi \cdot \rho h \cdot r^2 = \pi \cdot h \cdot r^2 \dfrac{m}{\pi r^2 h} = m$, отже:

$$m \cdot \frac{r^2 \omega^2}{4} = \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{\omega^2}{2} = J \cdot \frac{\omega^2}{2}, \text{ де } \frac{mr^2}{2} = J .$$

Перевіримо одиницю вимірювання кінетичної енергії згідно з цією формулою: $\left[\dfrac{\text{кг}\times\text{м}^2}{1} \times \dfrac{1}{\text{с}^2} = \dfrac{\text{кг}\times\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж} \right]$.

Для того, щоб результат збігався із розмірністю кінетичної енергії, перед тим, як підставити значення параметрів відповідно до умови завдання, необхідно привести їх одиниці вимірювання до системи СІ, а саме: $r = 350 \text{ мм} = 0{,}35 \text{ м}$.

Нарешті підставляємо значення параметрів у отриману вище формулу для обчислення кінетичної енергії диска. Отримуємо наступний результат: $E_{кін} = \dfrac{150 \cdot 0{,}35^2}{2} \cdot \dfrac{14^2}{2} = 98 \cdot 9{,}1875 \approx 900$.

Відповідь: $900\,(\text{Дж})$.

Тиск рідини, час витікання через малий отвір

Завдання такого змісту не рідко зручно вирішувати із застосуванням визначеного інтегралу.

Приклад 64. *Задача про тиск рідини на плоску поверхню, занурену вертикально.*

Розв'язання. Розглянемо спочатку загальний випадок. За законом Паскаля: величина, P, тиску рідини на горизонтальну поверхню, дорівнює вазі рідини у стовпі, основою якого є саме ця поверхня, і розраховується за формулою:

$$P = g \cdot \rho \cdot h \cdot S. \quad (1)$$

Де: g – прискорення вільного падіння, є величиною сталою: $9{,}81\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; ρ – густина рідини в $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; h – глибина занурення плоскої поверхні (м); S – площа відповідної поверхні (м^2);

Оскільки різні точки вертикально зануреної плоскої поверхні знаходяться на різній глибині, то формулу (1) відразу не можна використати для розв'язання поставленого завдання. Тому виведемо потрібну формулу.

Нехай у рідину занурена вертикальна пластина, обмежена лініями $x_1 = a$, $x_2 = b$, $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$. Для кращої ілюстрації розв'язку прямокутну систему координат обрано таким чином, як показано на рис. 64.

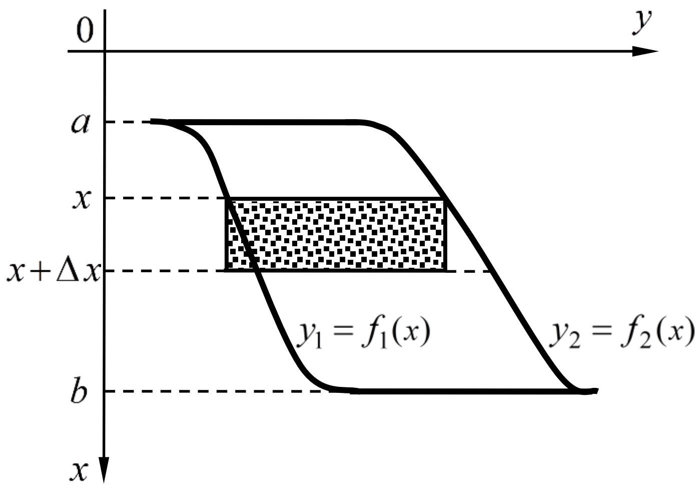


Рис. 64 Специфіка розташування системи координат

Розіб'ємо пластину на n малих смужок прямими, паралельними поверхні рідини (тобто паралельними осі *Oy*). На глибині x виділимо одну з них і позначимо через $f_2(x) - f_1(x)$ її довжину, а через Δx її ширину. Оскільки ширина смужки прямує до нуля, то це надає можливість розглядати її геометричну форму як прямокутник. Відтак, знаходимо її площу за формулою: $S = \left(f_2(x) - f_1(x)\right) \cdot \Delta x$. Згідно із законом Паскаля сила тиску рідини на таку смужку дорівнює силі тиску рідини на горизонтально розташовану рівновелику пластинку, зануреної на таку ж глибину.

Нехай частина величини тиску (P) є функція від змінної – x, тобто: $p = p(x)$ є той тиск, під яким перебуває частина пластини на відрізку $[a; x]$, де $x \in [a; b]$, $P(a) = 0$, $P(b) = P$. Надамо аргументу x досить малий приріст $\Delta x \approx dx$. Вочевидь, що тоді функція $p(x)$ отримає приріст Δp: $\Delta p = g \cdot \rho \cdot \left(y_2(x) - y_1(x)\right) \cdot \Delta x \cdot x$. Зважаючи на те, що dx має значення, яке прагне до 0, вважаємо виділену на рис. 64 елементарну смужку прямокутником, всі крапки якого знаходяться на одній глибині x. Такі умови дозволяють припустити, що частина плоскої поверхні, яку ми розглядаємо, – горизонтальна. Тоді: $dp = g \cdot \rho \cdot \left(y_2(x) - y_1(x)\right) \cdot x \cdot dx$. Отже,

$$P = g \cdot \rho \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left(f_2(x) - f_1(x)\right) \cdot x \cdot dx. \qquad (2)$$

Наприклад, акваріум, що має форму прямокутного паралелепіпеда (рис. 65), повністю заповнено водою, густина якої дорівнює $1000\ \text{кг}/\text{м}^3$. Треба знайти силу тиску води на одну з його вертикальних стінок, при цьому параметри стінки: $0{,}5\ \text{м} \times 1{,}3\ \text{м}$.

Згідно попередньо отриманої формули (2), якщо вважати, що акваріум (рис. 66) заповнений водою повністю, тобто верхній край його вертикальної стінки занурений на глибину $0{,}0\ \text{м}$ (нижня границя інтегрування – $x_1 = 0$), а нижній відповідно – на глибину $0{,}5\ \text{м}$ (верхня границя інтегрування – $x_2 = 0{,}5$), $y_1 = 0$, $y_2 = 1{,}3$, отримуємо:

$$P = g \int_0^{0,5} 1000 \cdot 1{,}3 \cdot x \cdot dx = 1300 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0,5} = 162{,}5g \approx 1{,}594 \cdot 10^3\ (\text{Н}).$$

Відповідь: $1{,}594 \cdot 10^3\ (\text{Н})$.

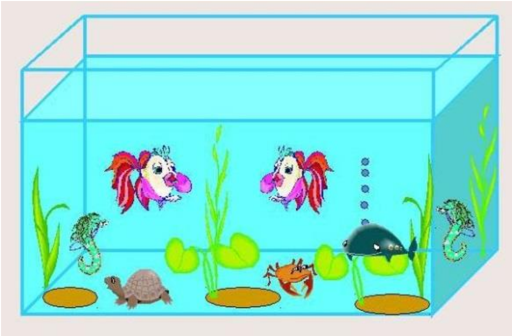


Рис. 65 Ілюстрація умови до прикладу 64

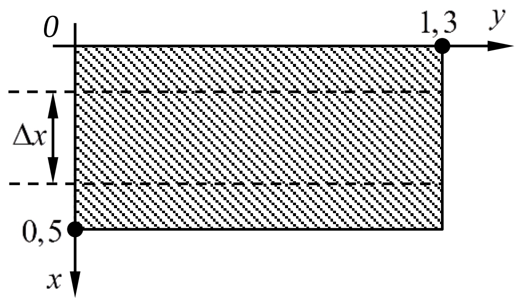


Рис. 66 Графічне визначення границь інтегрування

Приклад 65. *Задача про тиск на вертикально занурену поверхню: «акваріум з акулами».*

У розважальному центрі «Підводний світ» для підвищення рівня відвідувань, керівник настояв на створенні нового акваріуму, щоб у подальшому розмістити там акул (рис. 67). Фронтальне скло цього акваріума має форму півкола, радіус якого складає 15 м. Треба розрахувати силу тиску води на експозиційну стінку, якщо її діаметр співпадає з поверхнею води, прийняти густину води рівною – $p = 1000$ кг/м^3; прискорення вільного падіння – $g = 9{,}8$ м/с^2.

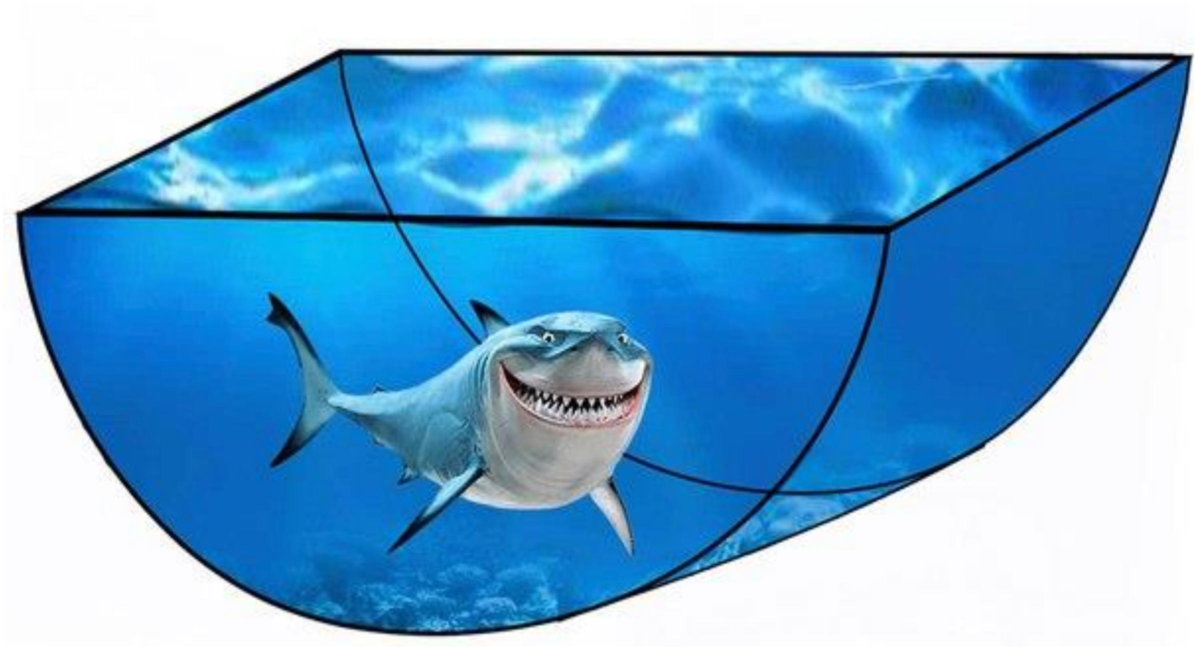


Рис. 67 Проект форми акваріуму у розважальному центрі

Розв'язання. На рис. 68 радіус кола позначено – *R*, центр кола, що співпадає с початком координат – точкою *O*, а систему координат розташовано зручним для розв'язання чином.

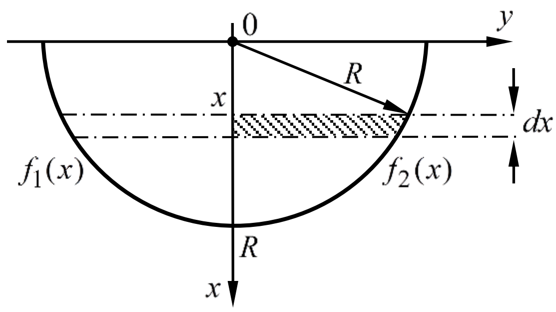


Рис. 68 Розташування системи координат

Тоді рівняння кола має вигляд: $x^2 + y^2 = R^2$, тобто з урахуванням умови задачі: $x^2 + y^2 = 225$.

Нехай, $\gamma = \rho \cdot g$, тоді тиск на вертикально занурену стінку обчислюється за формулою: $P = \gamma \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(f_2(x) - f_1(x) \right) \cdot x dx$.

Рівняння $f_1(x)$ та $f_2(x)$ відповідно є: $f_1(x) = -\sqrt{225 - x^2}$; $f_2(x) = \sqrt{225 - x^2}$. Згідно з рисунком, границі інтегрування: $x_1 = 0,\ x_2 = 15$.

Підставляючи дані за умовою параметри в формулу для обчислення тиску, отримуємо:

$$P = 9810 \int\limits_0^{15} \left(\sqrt{225 - x^2} + \sqrt{225 - x^2} \right) \cdot x dx = 9810 \cdot 2 \int\limits_0^{15} \left(\sqrt{225 - x^2} \right) \cdot x dx =$$

$$= -9810 \int\limits_0^{15} \left(\sqrt{225 - x^2} \right) \cdot d\left(225 - x^2\right) = -9810 \left. \frac{\left(225 - x^2\right)^{1,5}}{1,5} \right|_0^{15} = 9810 \cdot \frac{2}{3} \cdot (225)^{1,5} =$$

$$= 6540 \cdot 3375 = 22072500(\text{Н}) \approx 22,07(\text{МН})$$

Відповідь: 22072500 Н.

Приклад 66. *Задача про примусове викачування і самостійне витікання води із бочки.*

Яку роботу (в джоулях) треба виконати, щоб викачати воду із повністю налитої відкритої вертикальної циліндричної бочки (рис. 69), яка має радіус основи $R = 0,25\,\text{м}$ і висоту $H = 1\,\text{м}$. Питому вагу води ($\gamma = \rho \cdot g$) вважати рівною $9810\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$. За який час вода витече з бочки через круглий отвір, що знаходиться на дні бочки і має радіус $0,005\,\text{м}$.

Розв'язання. Для зручності розташуємо вісь координат перпендикулярно основі циліндра (рис. 70). Розіб'ємо відрізок $[O;H]$ на n рівних частин. Позначимо точки поділу x_0, x_1, …, x_n, так, що x_0 співпадатиме з точкою O, а x_n з точкою H. Проведемо площини паралельні основі циліндра крізь точки поділу. Розглянемо шар між паралельними площинами, які проходять через точки x_k та x_{k+1} перпендикулярно осі OH. Товщина такого шару води дорівнює: $x_{k+1} - x_k$; а об'єм: $V_k = (x_{k+1} - x_k) \cdot \pi R^2$.

Рис. 69 Відкрита бочка, з якою проводять експеримент

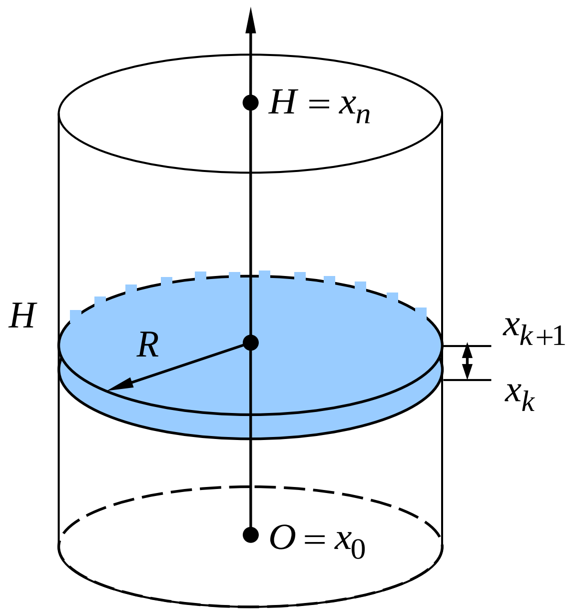


Рис. 70 Розташування системи координат

Для того, щоб викачати воду, яка знаходиться у даному шарі, її треба підняти до краю бочки, тобто на висоту x_k. Робота A_k, яка здійснюється при цьому дорівнюватиме $A_k = \gamma\pi R^2 x_k \frac{x_n - x_0}{n}$. Тоді повна робота по викачуванню всієї води визначатиметься формулою:

$$A = \int_0^H \gamma\pi R^2 x \cdot dx = \gamma\pi R^2 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \gamma\pi R^2 \cdot 0,5 = 9810 \cdot 3,14 \cdot 0,25^2 \cdot 0,5 = 962,606.$$

Швидкість струмини рідини з отвору у тонкій стінці відкритої посудини (рис. 71) за формулою Торрічеллі дорівнює $v = \sigma\sqrt{2gx}$, де $g = 9,81$ – прискорення вільного падіння, x – висота стовпа води для нашого випадку безпосередньо у бочці, коефіцієнт швидкості σ, який залежить від в'язкості рідини, для води складає приблизно – 0,97.

Нехай на початку витікання рівень води, яка міститься у бочці дорівнює x м, а за час dt (с) зменшується на dx (м). Розрахуємо об'єм води, яка витікає за цей нескінченно малий проміжок часу dt (с).

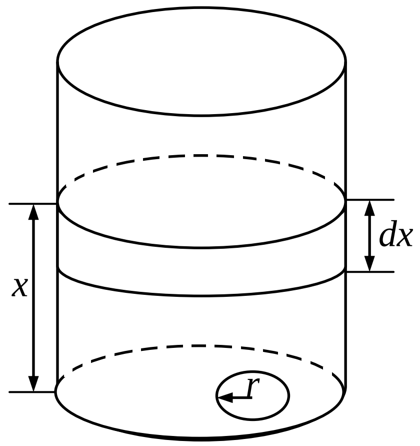


Рис. 71 Витікання води через отвір у дні бочки

З одного боку, об'єм dW дорівнює об'єму циліндричного шару висотою dx, та радіусом основи R. Таким чином $dW = \pi R^2 dx$. Також цей об'єм дорівнює об'єму циліндра, основою якого є отвір на дні бочки

$r = 0{,}005\text{м}$, а висота дорівнює $v \cdot dt$, де v – швидкість витікання води, отже $dW = \pi r^2 v \cdot dt = \pi r^2 \sigma\sqrt{2gx} \cdot dt$. Прирівнюючи вирази отримуємо:

$\sigma\pi r^2\sqrt{2g \cdot x}dt = \pi R^2 dx$. Виразимо dt: $dt = \dfrac{R^2 \cdot dx}{r^2\sigma\sqrt{2g \cdot x}}$, де $x \in [O; H]$.

Для того, щоб знайти час, за який вода витече з бочки треба проінтегрувати dt:

$$t = \int_0^H dt = \int_0^1 \frac{R^2 \cdot dx}{r^2\sigma\sqrt{2g \cdot x}} = \frac{R^2}{r^2\sigma} \cdot \left.\frac{\sqrt{2} \cdot x}{\sqrt{g \cdot x}}\right|_0^1 = \frac{0.0625}{0.00002425} \cdot 0.4517 = 1164 \text{ (с)}, \text{ тобто}$$

$t \approx 19{,}4$ (хвилин).

Відповідь: $t \approx 19{,}4$ хвилин, $A = 962{,}606$ Дж.

Рух тіла, матеріальної точки

Нехай матеріальна точка переміщується по прямій зі змінною швидкістю $v = v(t)$. Тоді шлях S, пройдений точкою за проміжок часу від t_1 до t_2 буде визначатися за допомогою визначеного інтеграла наступною формулою: $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

Приклад 67. *Задача про подоланий шлях.*

Швидкість матеріальної точки $v = v(t)$ на відрізку часу $t \in [a; b]$. Знайти довжину шляху – S, який подолає точка за цей проміжок часу, рухаючись прямолінійно.

Розв'язання. Швидкість, $v(t)$, залежить від часу, тобто приймає різні значення в пені моменти спостереження, тому вона є функцією, незалежною змінною якої є час, t. Суть завдання полягає в тому, що за відомою функціональною залежністю швидкості від часу необхідно знайти довжину шляху. При цьому будемо вважати швидкість, $v(t)$, неперервною функцією змінної – t. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n досить коротких відрізків часу (рис. 72), тоді:

$a = t_0$ – початковий час спостереження у досліді, наприклад, час зрушення з місця автомобіля (рис. 73), що стояв на дорозі;

$b = t_n$ – кінцевий час спостереження у досліді, тобто час зупинки;

$t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots, t_{n-1}$ – довільні точки, які розбивають проміжок $[a; b]$ на n частин; при цьому $t_1 < t_k < t_{k+1} < t_{n-1}$;

$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, де Δt_k – довжина *k-го* довільного частинного відрізку.

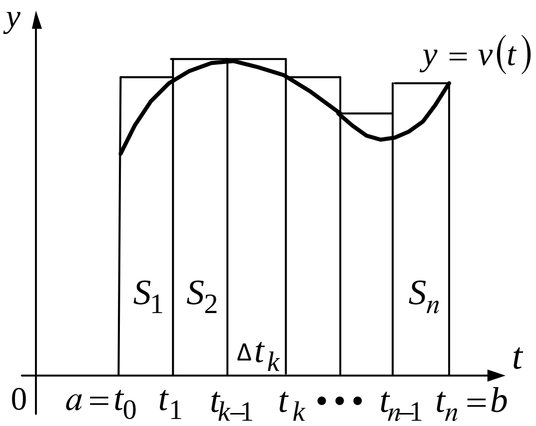


Рис. 72


Рис. 73

Оскільки за досить малий проміжок часу на будь-якій довільній ділянці швидкість майже не змінюється, то приблизно вважаємо її постійною величиною – $v(\tau_k)$, тобто припускаємо з механічної точки зору, що рух на відрізку $[t_k;\ t_{k+1}]$ часу близький до рівномірного, $\tau_k \in [t_k;\ t_{k+1}]$.

Отже, якщо $\Delta t_k \to 0$, то за час Δt_k подоланий шлях на кожному відрізку наближено дорівнює $v(\tau_k) \cdot \Delta t_k$. Результат є дійсним для кожного інтервалу, при $k = 1, 2, \ldots, n$.

Підсумовуємо усі величини частинних шляхів, отримуючи тим самим інтегральну суму: $S_n \approx \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k) \cdot \Delta t_k$.

Будемо називати найбільший з частинних відрізків часу $\left[t_k;\ t_{k+1}\right]$ – кроком дроблення і позначимо його як λ, отже $\lambda = \max\left\{\Delta t_k\right\}$.

Для отримання точної формули перейдемо до границі, збільшуючи число дроблень – $n \to \infty$, тим самим нескінченно подрібнюючи самі інтервали – $\lambda \to 0$. Таким чином, $S = \lim\limits_{\lambda \to 0} S_n = \int\limits_a^b v(t) \cdot dt$.

Відповідь: $S = \int\limits_a^b v(t) \cdot dt$.

Приклад 68. *Задача про відстань при одночасному початку руху.*

Два автомобілі почали рухатися одночасно з однієї точки в одному напрямку по прямій (рис. 74). Швидкість першого авто підпорядковується рівнянню: $v_1 = 6t^2 + 2t\ (м/с)$, другого: $v_2 = 4t + 5\ (м/с)$. На якій відстані один від одного автомобілі опиняться через 5 секунд після початку руху?

Розв'язання. Шукана величина є різницею відстаней, яку проїхали автомобілі за 5 секунд (рис. 75). Тому нижня границя інтегрування $t_1 = 0\ (с)$, а верхня границя – відповідно дорівнює $t_2 = 5\ (с)$.

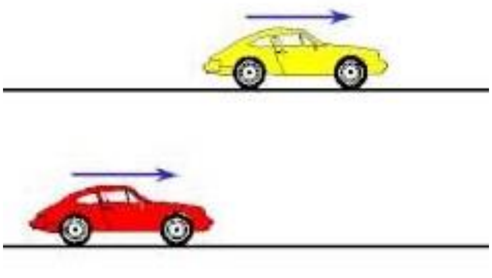


Рис. 74 Рух автомобілів

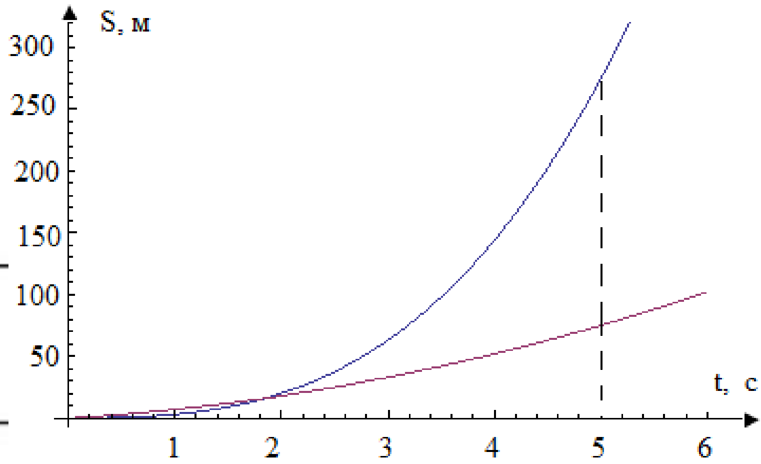


Рис. 75 Графіки функцій шляхів

Знайдемо шлях, який подолав перший автомобіль за перші 5 *с* руху, отже:

$S_1 = \int_0^5 \left(6t^2 + 2t\right)dt = \left(2t^3 + t^2\right)\Big|_0^5 = 2 \cdot 5^3 + 5^2 = 275$. Аналогічно – інший автомобіль за перші 5 с руху перемістився на відстань:

$$S_2 = \int_0^5 (4t + 5)dt = \left(2t^2 + 5t\right)\Big|_0^5 = 2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 = 75.$$

Тоді відстань між першим та другим автомобілем складе:

$$S = S_1 - S_2 = 275 - 75 = 200\ (м).$$

Відповідь: два автомобілі через 5 секунд опиняться на відстані 200 м один від одного.

Приклад 69. *Задача про винайдення шляху за відомим рівнянням швидкості, обчислення середньої швидкості руху.*

Швидкість руху тіла задана рівнянням $v = 12t - 3t^2$ (рис. 76). Визначити шлях пройдений тілом від початку руху до зупинки і середню швидкість на цьому шляху.

Розв'язання. По-перше, для числового знаходження значень часу початку руху тіла та його зупинки, треба розв'язати рівняння $12t - 3t^2 = 0$, оскільки у такі моменти спостереження швидкість руху дорівнює нулю: $3t(4 - t) = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$.

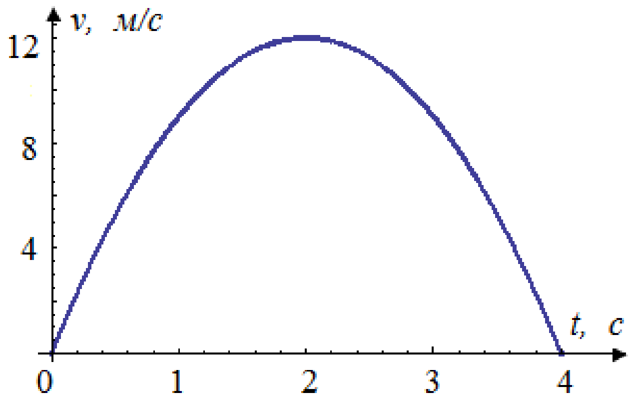


Рис. 76 Графік швидкості

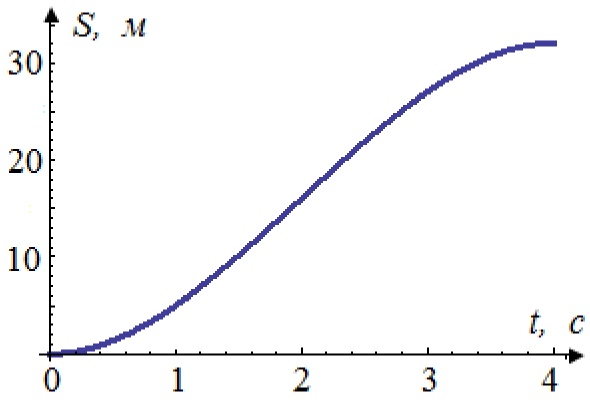


Рис. 77 Графік шляху

Тож, обчислимо визначений інтеграл із границями від 0 до 4. Оскільки час початку руху тіла – 0, а момент зупинки визначає шлях (рис. 77), який пройде тіло. Отже, $S=\int\limits_0^4\left(12t-3t^2\right)\cdot dt=\left(6t^2-t^3\right)\Big|_0^4=6\cdot4^2-4^3=32$.

По-друге, знайдемо середню швидкість за наступною формулою:
$v_{cp}=\dfrac{S}{t}$ (рис. 78).

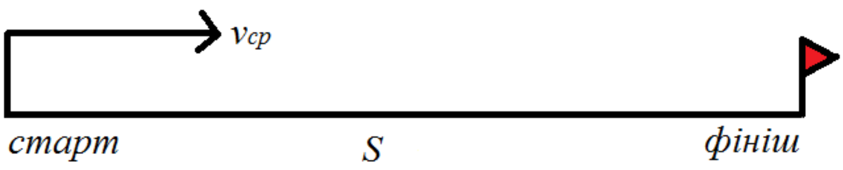


Рис. 78

Тож, середня швидкість на даному відрізку шляху становить:
$v_{cp}=\dfrac{S}{t}=\dfrac{32}{4}=8\left(\dfrac{м}{с}\right)$.

Відповідь: 32 *м*; 8 $\dfrac{м}{с}$.

Обчислення границь нескінченних сум

Якщо виникає необхідність обчислити границю суми, коли кількість доданків останньої необмежено зростає, то в деяких випадках це можна виконати за допомогою визначеного інтеграла. Задля цього дану суму, границю якої необхідно знайти, треба представити у вигляді інтегральної суми.

Тобто, наприклад, якщо розглянути точки $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{2}{n}$, … , $\dfrac{n}{n}$ як – точки розбиття відрізку $[0;\,1]$ на n рівних частин довжиною $\Delta x=\dfrac{1}{n}$, то для будь-якої неперервної функції $f(x)$ буде вірним:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]=\int\limits_0^1 f(x)\cdot dx.$$

Приклад 70. Обчислити границю суми:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right].$$

Розв'язання. Числа, які стоять в дужках, являють собою значення функції $f(x)=\sin x$ в точках $x_1=\frac{\pi}{n}$, $x_2=\frac{\pi}{n}$, …, $x_{n-1}=\frac{(n-1)\pi}{n}$, які розбивають відрізок $[0;\ \pi]$ на n рівних частин довжиною $\Delta x=\frac{\pi}{n}$. Якщо до цієї суми далі приєднати $\sin\frac{n\pi}{n}=0$, то вона буде інтегральною для функції $f(x)=\sin x$ на відрізку $[0;\ \pi]$.

За визначенням, границя такої інтегральної суми, коли $n\to\infty$ є визначеним інтегралом від функції $f(x)=\sin x$ від 0 до π. Відтак,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2.$$

Приклад 71.

Обчислити границю суми:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right).$$

Розв'язання. Перетворимо суму в дужках наступним чином:

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right).$$

Отримана сума являє собою інтегральну суму для функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ на відрізку $[0;\ 1]$, розбитому на n рівних частин. Границя такої інтегральної суми, коли $n \to \infty$ дорівнює визначеному інтегралу від функції $f(x)$ на відрізку $[0;\ 1]$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

Приклад 72. Обчислити границю наступної суми:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right].$$

Розв'язання. Перетворимо підкореневі вирази:

$$\frac{3}{n}\left[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right]=$$

$$=\frac{3}{n}\left[\sqrt{\frac{1}{1+0}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}}+\ldots+\sqrt{\frac{1}{1+3\frac{(n-1)}{n}}}\right].$$

Отримана сума є інтегральною для функції $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$ на відрізку $[0;\ 3]$; тому, за визначенням,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right]=$$

$$=\int_0^3\sqrt{\frac{1}{1+x}}\,dx=\int_0^3(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx=2\sqrt{1+x}\ \Big|_0^3=4-2=2\,.$$

Знаходження середнього інтегрального значення функції, оцінка визначеного інтеграла

Поняття середнього значення функції використовується в різноманітних сферах науки і техніки, позаяк багато величин часто характеризуються своїми середніми значеннями. Наприклад, середня швидкість хімічної реакції, середня потужність змінного струму, середній тиск та інші.

Виходячи із *теореми про середнє інтегральне значення функції*, можливо обчислити його числове значення на проміжку $[a; b]$ за формулою: $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$. Геометричну інтерпретацію поняття середнього інтегрального значення функції показано на рис. 79.

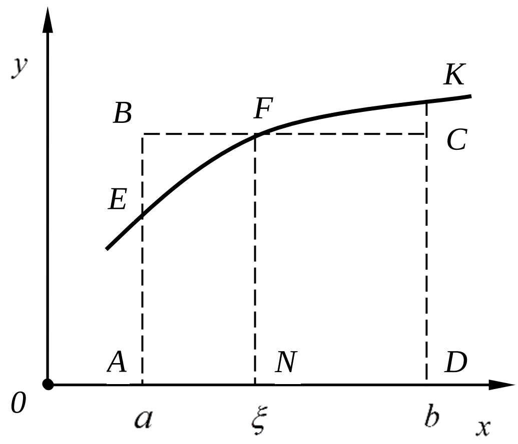


Рис. 79

Кількісне значення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ відповідає площі криволінійної трапеції *AEKD* з висотою $f(\xi)$. Побудуємо прямокутник *ABCD*, площа якого: $S_{ABCD} = f(\xi)\cdot(b-a)$. Остання дорівнює площі цієї трапеції, тобто криволінійна трапеція та прямокутник є рівновеликими. Тоді $(b-a)\cdot NF = \int_a^b f(x)dx$, звідки $NF = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$. Отже, середнє значення функції дорівнює значенню ординати кривої – *NF* у деякій проміжній точці ξ.

Приклад 73. Знайти середнє значення функції $y=\sin^2 x$ на інтервалі $(0;\ \pi)$.

Розв'язання.

$$\mu=\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}dx-\int_0^{\pi}\cos 2x dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}(\pi-0)=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $0{,}5$.

Приклад 74. Знайти середнє значення функції $f(x)=\sqrt[3]{x}$ на відрізку $[0;\ 1]$.

Розв'язання. $\mu=\dfrac{1}{1-0}\cdot\displaystyle\int_0^1\sqrt[3]{x}\,dx=\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1=\frac{3}{4}.$

Відповідь: $0{,}75$.

Приклад 75. Сила змінного струму $i=i_0\cdot\sin\dfrac{2\pi t}{T}$, де i_0 – амплітуда; T – період; t – час. Знайти ефективну силу струму i_e – квадратний корінь із середнього за період значення $\overline{i^2}$ квадрата сили струму.

Розв'язання. $\overline{i^2}=\dfrac{1}{T-0}\displaystyle\int_0^T i^2dt=\frac{1}{T}\int_0^T\left(i_0\cdot\sin\frac{2\pi t}{T}\right)^2dt=$

$$=\frac{1}{T}i_0^{\,2}\cdot\int_0^T\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{4\pi t}{T}\right)dt==\frac{1}{T}i_0^{\,2}\left(t-\frac{T}{4\pi}\sin\frac{4\pi t}{T}\right)\Bigg|_0^T=\frac{i_0^{\,2}}{2}$$

$$i_e=\sqrt{\overline{i^2}}$$

Відповідь: $i_e=0{,}5\sqrt{2}\,i_0$ (од. сили струму).

Оцінка визначеного інтеграла. На практиці часто буває так, що неможливо обчислити точне значення інтеграла. Але, можливо, досить чітко знати кількісні величини, між якими знаходиться значення інтеграла. Вище наведені властивості дозволяють оцінити визначений інтеграл:

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a),$$

де m і M відповідно – найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, $(b-a)$ – довжина цього відрізку.

Геометричний зміст. Для неперервної невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ площа відповідної криволінійної трапеції обмежена знизу і зверху площами двох прямокутників з тією ж основою $(b-a)$ і висотою відповідно m і M.

Приклад 76. Оцінити інтеграл $I = \int_1^3 \sqrt{3+x^3}\,dx$, не обчислюючи його.

Розв'язання. Розглянемо підінтегральну функцію $f(x) = \sqrt{3+x^3}$ на відрізку $[1; 3]$. Знайдемо її похідну, отримаємо, що $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{3+x^3}} > 0$ на $[1; 3]$. З нерівності витікає, що сама функція на даному відрізку монотонно зростає. Отже, свої найменше і найбільше значення вона отримує на кінцях відрізку $[1; 3]$, а саме: $m = f(1) = \sqrt{4} = 2$ і $M = f(3) = \sqrt{30}$. Відтак, якщо $b - a = 3 - 1 = 2$, то за формулою оцінки визначеного інтеграла маємо:

$$2 \cdot 2 \le \int_1^3 \sqrt{3+x^3}dx \le \sqrt{30} \cdot 2.$$

Відповідь: $4 \le I \le 2\sqrt{30}$.

Невласні інтеграли першого та другого роду, властивості, обчислення

Підінтегральна функція у визначеному інтегралі має бути безперервною, а відрізок інтегрування скінченим. Однак, на практиці виникають завдання, які при формальному їх вирішенні призводять до інтегралів, подібних до визначених, але при цьому порушуються умови безперервності функцій чи скінченності інтервалів інтегрування. У цих випадках розглядаються такі поняття як невласні інтеграли.

До невласних інтегралів *першого роду* відносяться інтеграли з нескінченними однією або двома границями інтегрування.

Невласний інтеграл І роду $\int\limits_{a}^{+\infty} f\left(x\right)dx$ існує або збігається $\left(\rightarrow\leftarrow\right)$, якщо існує наступна кінцева границя: $\lim\limits_{c\to\infty}\int\limits_{a}^{c} f\left(x\right)\cdot dx=\int\limits_{a}^{+\infty} f\left(x\right)\cdot dx$. В іншому випадку, а саме: якщо границя не існує чи дорівнює нескінченності, інтеграл не існує або розбігається $\left(\leftarrow\rightarrow\right)$.

Аналогічно можна скласти інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f\left(x\right)dx=\lim\limits_{c\to-\infty}\int\limits_{c}^{b} f\left(x\right)dx$.

Якщо обидві границі інтегрування нескінченні, то числову вісь за допомогою будь-якої точки розбиваємо на два напівбезкінечні інтервали.

Таким чином, отримуємо: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{a} f\left(x\right)dx+\int\limits_{a}^{+\infty} f\left(x\right)dx$.

Такий невласний інтеграл буде збігатись, якщо кожний з двох інтегралів праворуч збігається.

З геометричної точки зору, невласний інтеграл з нескінченою верхньою границею у випадку, якщо $f(x)>0$ на нескінченому інтервалі $[a,+\infty)$ та $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx<\infty$ (рис. 80), дорівнює площі нескінченної криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$ і прямою $x=a$ на означеному інтервалі.

Розглянемо *властивості невласного інтегралу*.

Теорема (ознака порівняння). Нехай функції $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)$ безперервні на інтервалі $\left[a;+\infty\right)$ та $0\le f\left(x\right)\le g\left(x\right)$ скрізь на $\left[a;+\infty\right)$. Тоді:

1) якщо $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, причому: $0 \le \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$; 2) якщо $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ розбігається, то розбігається й інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

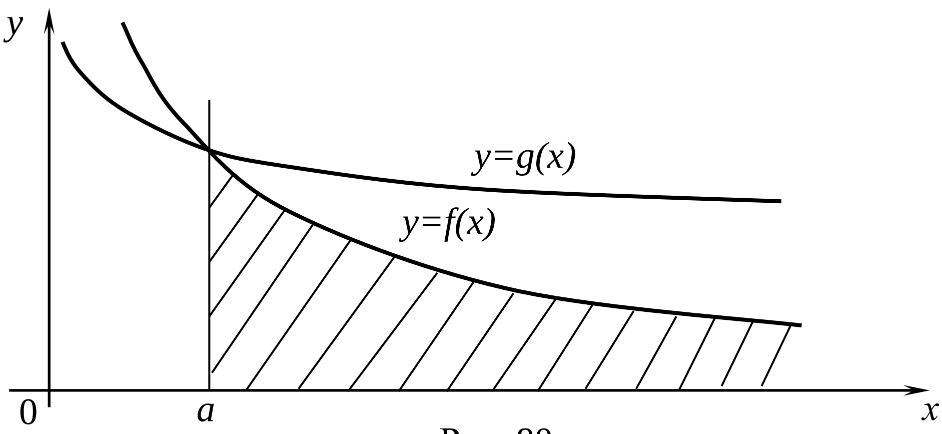


Рис. 80

Інакше кажучи, вище сформульовану теорему можна інтерпретувати так: якщо інтеграл від більшої функції збігається, то інтеграл від меншої функції тим більш збігається, якщо ж інтеграл від меншої функції розбігається, то інтеграл від більшої також розбігається.

Теорема (достатня ознака збіжності знакозмінних функцій). Нехай функція $y = f(x)$ безперервна на інтервалі $[a;+\infty)$, тоді якщо невласний інтеграл від модуля функції на даному інтервалі $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається, то збігається й інтеграл від самої функції $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$; причому, вірна нерівність: $\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx\right| \le \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Якщо функція $y = f\left(x\right)$ визначена на інтервалі $\left[a;+\infty\right)$ та інтегрована на будь-якому проміжку $\left[a;b\right]$, де $b > a$, то невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$ називається абсолютно збіжним, коли збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left|f\left(x\right)\right|dx$. У випадку збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$ і розбіжності $\int\limits_a^{+\infty} \left|f\left(x\right)\right|dx$, невласний інтеграл першого роду $\int\limits_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$ є умовно збіжним.

Приклад 77. Обчислити значення невласного інтеграла або довести його розбіжність: $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^3}dx$.

Розв'язання. Даний інтеграл є невласним інтегралом першого роду, оскільки верхня границя інтегрування є нескінченною. Замінимо цю границю інтегрування на параметр «c», та спрямуємо його до $+\infty$.

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{c\to+\infty}\int\limits_0^{c} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty}\int\limits_0^{c} e^{-x^2}d\left(-x^2\right) = -\frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty} e^{-x^2}\Big|_0^c =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty}\left(e^{-c^2} - e^0\right)\Big|_0^c = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: даний інтеграл збігається та дорівнює при цьому $\frac{1}{2}$.

Приклад 78. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos 2x dx$, якщо він збіжний, або довести його розбіжність.

Розв'язок. На підставі визначення невласного інтегралу першого роду: $\int\limits_0^{+\infty} \cos 2x dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b} \cos 2x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{\sin 2b}{2}$. Така границя не існує, оскільки не можна визначити конкретне значення границі або знайти її нескінченне значення. Відтак, досліджуваний інтеграл розбігається.

Відповідь: $(\leftarrow\rightarrow)$.

Приклад 79. Дослідити невласний інтеграл, який представлено у загальному випадку, на збіжність: $\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx,\ a>0$.

Розв'язання. Так само як у попередньому прикладі перейдемо до границі:

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{c\to+\infty}\int\limits_a^{c}\frac{1}{x^p}d=\lim_{c\to\infty}\left[\begin{array}{ll}\ln|x|\Big\|_a^c, & при\quad p=1,\\ \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_a^c & ,при\quad p\neq 1\end{array}\right.=$$

$$=\lim_{c\to\infty}\left[\begin{array}{ll}\ln|c|-\ln|a|, & при\ \ p=1,\\ \dfrac{c^{-p+1}}{-p+1}-\dfrac{a^{-p+1}}{-p+1}, & при\,p<1,\\ \dfrac{1}{(-p+1)c^{p-1}}-\dfrac{1}{(-p+1)a^{p-1}}, & при\,p>1\end{array}\right.=\left[\begin{array}{ll}+\infty, & при\quad p\leq 1,\\ \dfrac{1}{(-p+1)a^{p-1}}, & при\quad p>1.\end{array}\right.$$

Таким чином, отримуємо, що при всіх $a>0$ інтеграл розбігається при $p\leq 1$, та збігається при $p>1$.

Даний інтеграл використовують як еталонний при дослідженні на збіжність складних невласних інтегралів I роду.

Приклад 80. Дослідити невласний інтеграл на збіжність $\int\limits_7^{+\infty}\frac{1}{\ln x}dx$.

Розв'язання. Первісну від такої функції в елементарних функціях знайти неможливо. Але в багатьох випадках достатньо з'ясувати збігається чи ні даний невласний інтеграл, та, якщо збігається, то в яких межах знаходиться його значення. Логарифмічна функція, віддаляючись від початку відліку, зростає повільніше свого аргументу. Тому можна припустити, що даний інтеграл розбігається. Підберемо таку функцію, що буде менше ніж дана функція, а інтеграл від неї з такими ж границями як досліджуваний, розбігається. Отже, $\ln x < x$ на $(7;+\infty] \Rightarrow \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$.

Але інтеграл $\int\limits_{7}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ розбігається, оскільки відноситься до випадку $p=1$ попереднього прикладу. Отже, за властивостями невласних інтегралів досліджуваний інтеграл також розбігається.

Приклад 81. Дослідити невласний інтеграл на збіжність $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx$.

Розв'язання: Як у попередніх прикладах перейдемо до границі:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{x}{(1+x)^3} dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{0}^{b} \left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3} \right] dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} \right)\Bigg|_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-2-2x+1}{2(1+x)^2}\Bigg|_0^b \right) = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-2x-1}{2(1+x)^2}\Bigg|_0^b \right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-2b-1}{2(1+b)^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Отже, невласний інтеграл першого роду збігається та дорівнює $\frac{1}{2}$.

Приклад 82. Дослідити на збіжність невласний інтеграл: $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^8} dx.$

Розв'язок. Безпосереднє обчислення цього невласного інтегралу 1 роду за визначенням неможливе, оскільки $\cos 4x$ при $x \to \infty$ не прямує до певного числа (рис. 81).

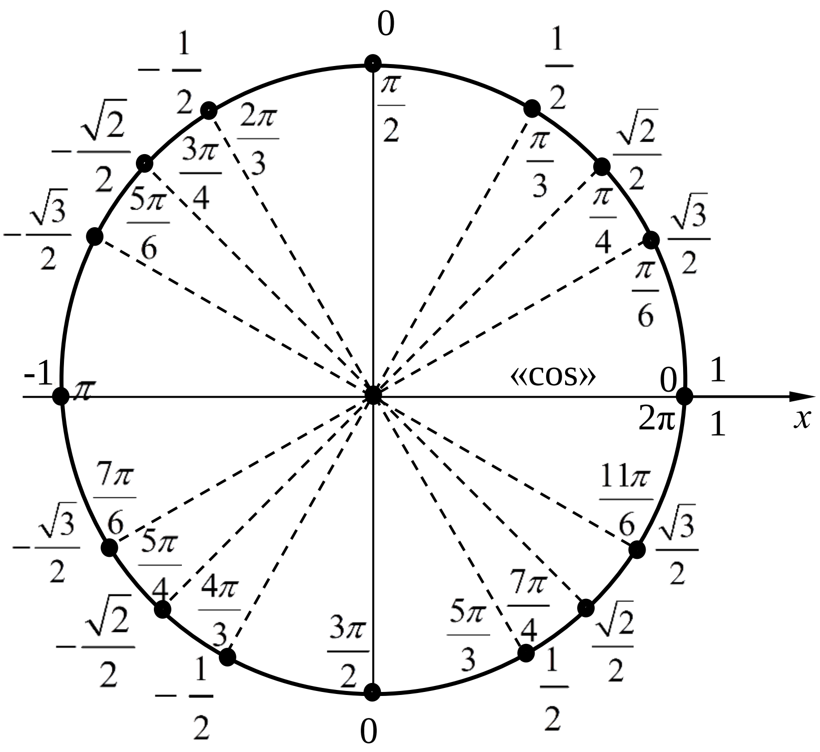


Рис. 81 Значення $\cos 4x$ залежно від його аргументу

Візьмемо до уваги той факт, що $\left|\frac{\cos 4x}{x^8}\right| \le \frac{1}{x^8}$. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^8} dx$ збігається за визначенням, оскільки: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^8} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^8} dx = -\lim_{b\to\infty} \frac{1}{7x^7}\Big|_1^b = \frac{1}{7}$.

Отже, за ознакою порівняння інтеграл $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos 4x}{x^8}\right| dx$ збігається. Має місце наступна *теорема*: якщо функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ і збігається $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$, то збігається і інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Відтак, за визначенням абсолютної збіжності невласних інтегралів першого роду – інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^8} dx$ збігається абсолютно.

Відповідь: досліджуваний інтеграл збігається абсолютно.

Приклад 83. Дослідити на збіжність невласний інтеграл: $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x} dx$ $(a \neq 0)$.

Розв'язок. Безпосередньо ознаку порівняння застосувати неможливо, тому доведемо, що цей інтеграл збігається через його обчислення. Інтегруємо по частинах:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x} dx = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{d(\sin \alpha x)}{x} = \left| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = \frac{1}{x};\ du = -\frac{1}{x^2}; \\ dv = \cos \alpha x \cdot dx;\ v = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \left(\left. \frac{\sin \alpha x}{x} \right|_{1}^{+\infty} - \int\limits_{1}^{+\infty} \sin \alpha x \cdot d\left(\frac{1}{x}\right) \right) = -\frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^2} dx.$$

Оскільки, $\left| \frac{\sin \alpha x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ та інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ $(\to\leftarrow)$, то інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^2} dx$ також збігається. Відповідно є збіжним і $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x} dx$.

Покажемо, що для останнього інтегралу немає абсолютної збіжності, тобто $\int\limits_{1}^{+\infty} \left| \frac{\cos \alpha x}{x} \right| dx$ розбігається. Скористуємося ознакою збіжності Діріхлє: якщо на піввісі $x \geq a$ 1) функція $f(x)$ неперервна та має обмежену первісну; 2) функція $g(x)$ неперервно диференційована та спадає, прямуючи до нуля при $x \to \infty$, тобто $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$, то інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x) g(x) dx$ збігається.

Ми не можемо скористуватися цією ознакою одразу, бо у нашому випадку інтеграл від невід'ємної функції необмежений. Ми можемо скористуватися ознакою, розглядаючи косинус без модуля. Застосуємо тригонометричні формули.

Оскільки, $\left|\cos\alpha x\right| \ge \cos^2\alpha x = \frac{(1+\cos 2\alpha x)}{2}$, то

$$\int_1^b \left|\frac{\cos\alpha x}{x}\right| dx \ge \frac{1}{2}\int_1^b \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int_1^b \frac{\cos 2\alpha x}{x} dx.$$

Інтеграл $\int_1^b \frac{dx}{x}$ розбігається ($p=1$) Згідно прикладу розглянутому вище.

Для інтегралу $\int_1^b \frac{\cos 2\alpha x}{x} dx$ існує границя при $b \to +\infty$, його збіжність доводиться безпосереднім обчисленням із застосуванням інтегрування по частинах. Проте сума границь, що утворюється при обчисленні двох невласних інтегралів є величиною нескінченою. Таким чином, $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos\alpha x}{x}\right| dx$ розбігається. Отже, доведено, що інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{x} dx$ збігається, а $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos\alpha x}{x}\right| dx$ – розбігається. Відтак, інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{x} dx$ збігається умовно.

Відповідь: досліджуваний інтеграл збігається умовно.

Розглянемо *невласний інтеграл другого роду*, тобто випадок, коли функція $f(x)$ має розрив в будь-якій точці відрізку $[a;b]$, а в інших – неперервна. Якщо точка $x=b$ є точкою розриву – точка розриву винесена на границю межі інтегрування, то такий інтеграл не є визначеним у тому розумінні, в якому ми з’ясували раніше; а саме: підінтегральна функція не є неперервною на відрізку інтегрування, хоча інтеграл буде виглядати так само як звичайний визначений інтеграл. При цьому існує таке досить мале $\varepsilon > 0$, коли функція $f(x)$ є інтегрованою на будь-якому з відрізків $[a;b-\varepsilon]$.

Невласний інтеграл другого роду $\int\limits_a^b f(x)dx$, де точка $x=b$ є точкою розриву, існує або збігається $(\to\leftarrow)$, якщо має місце наступна кінцева границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx$. В іншому випадку, тобто, якщо границя не існує або дорівнює нескінченності, інтеграл не існує чи розбігається.

Аналогічно, якщо функція не обмежена на відрізку $[a;b]$, але інтегрована на будь-якому відрізку $[a+\varepsilon;b]$, то вважаємо: $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Нарешті, якщо єдина точка розриву $x=r$ є внутрішньою точкою відрізка $[a;b]$, то невласний інтеграл розбиваємо на два невласних, виносячи точку розриву на границю інтервалу інтегрування: $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^r f(x)dx+\int\limits_r^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{r-\varepsilon} f(x)dx+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{r+\varepsilon}^b f(x)dx$. Такий невласний інтеграл буде збігатись, якщо кожен з двох інтегралів збігається.

Властивості невласного інтегралу другого роду аналогічні властивостям інтегралу першого роду.

Теорема. Нехай функції $y=f(x)$, $y=g(x)$ неперервні на інтервалі $[a;r)$ та $0\le f(x)\le g(x)$ усюди на $[a;r)$. Тоді: 1) якщо $\int\limits_a^r g(x)dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int\limits_a^r f(x)dx$, причому $0\le\int\limits_a^r f(x)dx\le\int\limits_a^r g(x)dx$; 2) якщо $\int\limits_a^r f(x)dx$ розбігається $\int\limits_a^r g(x)dx$.

Інакше кажучи дану теорему можна інтерпретувати так: якщо інтеграл від більшої функції збігається, то інтеграл від меншої тим більш збігається; якщо ж інтеграл від меншої функції розбігається, то інтеграл від більшої функції теж збігається.

Теорема. Нехай функція $y = f\left(x\right)$ неперервна на інтервалі $\left[a;r\right)$, тоді, якщо невласний інтеграл від модуля функції на даному інтервалі $\int\limits_a^r \left|f\left(x\right)\right|dx$ збігається, то збігається й інтеграл від самої функції $\int\limits_a^r f\left(x\right)dx$, тобто збігається абсолютно, причому вірна нерівність $\left|\int\limits_a^r f\left(x\right)dx\right| \le \int\limits_a^r \left|f\left(x\right)\right|dx$.

Приклад 84. Дослідити невласний інтеграл другого роду на збіжність: $\int\limits_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$.

Розв'язання. Точка безкінечного розриву підінтегральної функції: $x = 1$ – є нижньою границею інтегрування. Позначимо її квадратними дужками. Перейдемо до границі.

$$\int\limits_{[1]}^2 \frac{1}{\left(x-1\right)^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{\left(x-1\right)^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-1+\frac{1}{1+\varepsilon-1}\right) = \infty.$$

Отже, невласний інтеграл другого роду розбігається.

Приклад 85. Дослідити невласний інтеграл другого роду на збіжність: $\int\limits_0^b \frac{1}{x^p}dx$, у випадку, якщо $b > 0$.

Розв'язання. Перейдемо до границі.

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}dx = \lim_{c\to+0}\int_c^b \frac{1}{x^p}dx = \lim_{c\to+0}\left[\begin{array}{l} \ln|x|\Big|_c^b, \quad \text{при} \quad p=1; \\ \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_c^b, \text{при } p\neq 1 \end{array}\right. =$$

$$= \lim_{c\to+0}\left[\begin{array}{ll} \ln|b|-\ln|c|, & \text{при} \quad p=1; \\ \dfrac{b^{-p+1}}{-p+1}-\dfrac{c^{-p+1}}{-p+1}, & \text{при } p<1; \\ \dfrac{1}{(-p+1)b^{p-1}}-\dfrac{1}{(-p+1)c^{p-1}}, & \text{при } p>1 \end{array}\right. = \begin{cases} +\infty, \text{при} \quad p\geq 1; \\ \dfrac{b^{1-p}}{1-p}, \text{при} \quad p<1. \end{cases}$$

У підсумку отримуємо, що досліджуваний невласний інтеграл розбігається при $p\geq 1$, та збігається при $p<1$. Даний інтеграл також використовують як еталонний при дослідженні на збіжність складних невласних інтегралів другого роду.

Приклад 86. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^4 \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання. Даний інтеграл є невласним інтегралом, оскільки підінтегральна функція у внутрішній точці відрізку інтегрування – $x=1$ зазнає безкінечний розрив. Відтак, досліджуваний інтеграл є невласним інтегралом другого роду та для обчислення потребує розбиття на такі два інтеграли, в яких точка розриву є відповідно верхньою та нижньою границею інтегрування: $\int\limits_0^4 \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx = \int\limits_0^{[1]} \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx + \int\limits_{[1]}^4 \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx$.

Розглянемо перший інтеграл:

$$\int\limits_{0}^{[1]} \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx = \left| \sqrt{x}-1=t;\ x=(t+1)^2;\ dx=2(t+1)\cdot dt;\ t_н=-1;\ t_в=0 \right| = -2\int\limits_{-1}^{[0]} \frac{t+1}{t}dx =$$

$$= -2\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{+\varepsilon} \frac{t+1}{t}dx = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(t+\ln|t|\right)\Big|_{-1}^{+\varepsilon} = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(+\varepsilon+\ln|+\varepsilon|+1-\ln 1\right) = +\infty.$$

Перший інтеграл розбігається, отже, другий інтеграл, що входить до суми, немає сенсу розглядати, оскільки обчислювальний інтеграл, незалежно від значення другого невласного інтегралу, є розбіжним.

Приклад 87. Дослідити на збіжність невласний інтеграл від необмеженої функції: $\int\limits_0^1 \frac{2x+\text{ch}x}{\sqrt[4]{x^2+\text{sh}x}}dx.$

Розв'язання. При $x=0$ знаменник функції перетворюється на 0, а чисельний дорівнює 1, отже, $x=0$ – точка розриву II роду. В усіх інших точках на відрізку (0;1], функція під інтегралом неперервна.

$$\int \frac{2x+\text{ch}x}{\sqrt[4]{x^2+\text{sh}x}}dx = \left| d(x^2+\text{sh}x) = (2x+\text{ch}x)dx \right| = \int (x^2+\text{sh}x)^{-\frac{1}{4}} d(x^2+\text{sh}x) =$$

$$= \left| x^2+\text{sh}x = t \right| = \int t^{-\frac{1}{4}}dt = \frac{4t^{3/4}}{3} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^2+\text{sh}x} + C.$$

Використовуючи визначення невласного інтегралу від необмеженої функції, а також формулу Ньютона-Лейбніца отримуємо:

$$\int\limits_0^1 \frac{2x+\text{ch}x}{\sqrt[4]{x^2+\text{sh}x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{+\varepsilon}^1 \frac{2x+\text{ch}x}{\sqrt[4]{x^2+\text{sh}x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^2+\text{sh}x}\Big|_{+\varepsilon}^1 =$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[4]{1+\text{sh}1} - \sqrt[4]{\varepsilon^2+\text{sh}\,\varepsilon}\right) = \frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{1+\text{sh}1}.$$

Отже, інтеграл збігається.

Достатні ознаки збіжності невласних інтегралів у граничній формі

Збіжним невласним інтегралам притаманні усі основні властивості визначених інтегралів. При розгляді невласного інтегралу перед усім необхідно встановити, чи буде він збіжним. Означене питання про збіжність може бути вирішено або безпосереднім обчисленням невласного інтегралу, або за допомогою спеціальних ознак збіжності.

Ознака порівняння у граничній формі для невласних інтегралів I роду.

Якщо $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=const\neq 0$, то невласні інтеграли першого роду $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ і $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ поводять себе однаково у сенсі збіжності. У якості функції порівняння $\varphi(x)$ часто обирають функцію: $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^p}$, використовуючи, що $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^p}\begin{cases}(\rightarrow\leftarrow), & \textit{якщо } \mathrm{p}>1,\\ (\leftarrow\rightarrow), & \textit{якщо } \mathrm{p}\leq 1.\end{cases}$

Приклад 88. Дослідити на збіжність невласний інтеграл першого роду, використовуючи ознаку збіжності: $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання. Інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ $(p=2>1)$ – збігається, тому з ознаки порівняння у граничної формі, маємо: $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\underset{x\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$;

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=1.$$

Отже, досліджуваний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ збігається.

Ознака порівняння у граничній формі для невласних інтегралів II роду.

Результатом використання ознаки є порівняння функції під інтегралом з функцією достатньо визначеною для невласних інтегралів другого роду.

Якщо $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = const \neq 0$, то невласні інтеграли другого роду $\int\limits_a^c f(x)dx$ і $\int\limits_a^c \varphi(x)dx$ поводять себе однаково у сенсі збіжності. В якості функцій порівняння часто обирають: $\varphi(x) = \dfrac{A}{(c-x)^p}$ або $\varphi(x) = \dfrac{A}{(x-c)^p}$, де $A = const$, $c = const$, $p > 0$. При цьому зазвичай використовують наступні відомості про збіжність інтегралів, для яких точка $x = c$ є точкою безкінечного розриву їх підінтегральних функцій:

$$A\int\limits_a^c \frac{dx}{(c-x)^p}\left[\begin{array}{l}(\to\leftarrow),\ \textit{якщо}\ p<1;\\ (\leftarrow\to),\ \textit{якщо}\ \ p\geq 1\end{array}\right. \quad \text{і} \quad A\int\limits_c^b \frac{dx}{(x-c)^p}\left[\begin{array}{l}(\to\leftarrow),\ \textit{якщо}\ p<1;\\ (\leftarrow\to),\ \textit{якщо}\ \ p\geq 1.\end{array}\right.$$

Приклад 89. Дослідити збіжність інтегралу: $\int\limits_0^1 \dfrac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. Застосувати достатню ознаку збіжності у граничній формі.

Розв'язання. Функція під інтегралом $f(x) = \dfrac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ має точку розриву другого роду – $x = 1$. Порівняємо досліджуваний невласний інтеграл зі збіжним невласним інтегралом: $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ $\left(\alpha = \dfrac{1}{3} < 1\right)$, $\varphi(x) = \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ Тоді:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{e^x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}} = \lim_{x\to 1}\frac{e^x\cdot\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt[3]{1+x+x^2}} = \frac{e}{\sqrt[3]{3}}.$$

Отже, досліджуваний інтеграл за достатньою ознакою збіжності невласних інтегралів другого роду у граничній формі – збігається.

Використання середовища MathCad

Система комп'ютерної математички MathCad – програмний засіб, який дозволяє отримати середовище для виконання на комп'ютері різноманітних математичних і технічних розрахунків, при цьому надаючи користувачеві інструменти для роботи з формулами, числами, графіками і текстами. Привабливість саме цієї системи комп'ютерної математики, на відміну від інших подібних систем, забезпечується, у першу чергу, простим у освоєнні та досить зручним інтерфейсом.

Система комп'ютерної математики MathCad являє собою сукупність основних компонент:

1) редактор формул (з можливістю вставки математичних виразів, шаблонів графіків і текстових коментарів);

2) графічний редактор (вставка графічних областей двовимірних і тривимірних графіків);

3) центр ресурсів (інтегратор ресурсів системи);

4) електронні книги (книги з описом типових розрахунків у різних областях науки і техніки);

5) довідкова система;

6) «швидкі шпаргалки» (короткі приклади з коментарями);

7) браузер Інтернету.

Оскільки MathCad є математичним редактором, то у його середовищі можливо проводити різноманітні наукові та інженерні розрахунки, починаючи від елементарної арифметики і закінчуючи складними реалізаціями чисельних методів. Користувачі MathCad – це студенти, вчені, інженери, технічні фахівці різних галузей. Завдяки простоті застосування, наочності математичних дій, великій бібліотеці вбудованих функцій і чисельних методів, можливості символьних обчислень, а також потужному апарату представлення результатів (графіки самих різних типів, засоби підготовки друкованих документів і Web-сторінок), MathCad став найбільш популярним математичним додатком. MathCad, на відміну від більшості інших сучасних математичних пакетів, побудований відповідно до принципу WYSIWYG («*What you see is what you get*» – «що Ви бачите, то і отримаєте»). Тому він дуже простий у використанні, зокрема, через відсутність необхідності спочатку писати програмний код, що реалізовує ті чи інші математичні розрахунки, а потім запускати створену програму на виконання. Замість цього досить просто вводити математичні вирази за допомогою вбудованого редактора формул, причому у вигляді, максимально наближеному до загальноприйнятого, і відразу отримувати результат. Крім того, можна виготовити на принтері друкарську копію документа або створити сторінку в Інтернеті саме в тому вигляді, який цей документ має на екрані персонального комп’ютера при роботі з MathCad. Програмне забезпечення MathCad має всі можливості для того, щоб користувач, який не володіє спеціальними знаннями в програмуванні, міг в повній мірі долучитися до досягнень сучасної обчислювальної науки і комп’ютерних технологій. При цьому для ефективної роботи з редактором MathCad досить базових навичок користувача.

Відповідно до проблем, що виникають у інженерній практиці, їх математична реалізація потребує вирішення одного або відразу кількох з наступних завдань:

● введення на комп’ютері різноманітних математичних виразів (для подальших розрахунків або створення документів, презентацій, Web-сторінок);

● виконання математичних обчислень;

● побудова графіків з результатами розрахунків;

● введення вихідних даних і виведення результатів у текстові файли або файли з базами даних в інших форматах;

● підготовка звітів виконаної роботи у вигляді друкованих документів;

● створення Web-сторінок і публікація результатів в Інтернеті;

● отримання різнопланової довідкової інформації з царини математики.

Усі вище означені, а також деякі інші, завдання у повному обсязі можуть бути вирішені в середовищі MathCad.

● Математичні вирази і текст вводяться за допомогою формульного редактора MathCad, який за можливостями і простоті використання не поступається, наприклад, редактору формул, вбудованому в Microsoft Word.

● Математичні розрахунки проводяться негайно і порівняно швидко, відповідно до введених формул.

● Графіки різних типів, у залежності від вибору користувача, з досить великою кількістю можливостей форматування вставляються безпосередньо в документи.

● Можливе введення і виведення даних у файли різних форматів.

● Документи можуть бути роздруковані безпосередньо в MathCad у тому вигляді, який користувач бачить на екрані персонального комп'ютера, або збережені в форматі RTF для подальшого редагування у більш потужних текстових редакторах, наприклад, Microsoft Word.

● Можливе збереження документів у форматі Web-сторінки, причому створення файлів з малюнками відбувається автоматично.

● Символьні обчислення дозволяють миттєво отримати різноманітну довідкову математичну інформацію, а система допомоги, центр ресурсів і вбудовані електронні книги допомагають швидко відшукати потрібну довідку або приклад тих чи інших розрахунків.

Таким чином, до складу системи комп'ютерної математики MathCad входять кілька інтегрованих між собою компонентів – це потужний текстовий редактор для введення і редагування як тексту, так і формул, обчислювальний процесор – для проведення розрахунків згідно введеним формулам, і символьний процесор, який є, по суті, системою штучного інтелекту. Поєднання цих компонентів створює зручне обчислювальне середовище для різноманітних математичних розрахунків і, одночасно, документування результатів роботи.

У системі комп’ютерної математики MathCad інтерфейс користувача здебільшого інтуїтивний і схожий з іншими додатками Windows. Наведемо далі його складові частини.

– верхнє меню, або рядок меню (menu bar);

– панелі інструментів (toolbars) Standard (стандартна) і Formatting (форматування);

– панель інструментів Math (Математика) і доступні через неї додаткові математичні панелі інструментів;

– робоча область (worksheet);

– рядок стану (status line, або status bar);

– спливаючі, або контекстні, меню (pop-up menus, або context menus);

– діалогові вікна, або діалоги (dialogs).

Більшість команд можна виконати як за допомогою меню (верхнього або контекстного), так і панелей інструментів або клавіатури.

Рядок меню розташовується у верхній частині вікна MathCad. Вона містить дев’ять заголовків, «клік» мишею на кожному з яких призводить до появи відповідного меню з переліком згрупованих за дією команд, а саме:

● File (файл) – команди, пов’язані зі створенням, відкриттям, збереженням, пересиланням електронною поштою і роздруківкою на принтері файлів з документами;

● Edit (правка) – команди, які стосуються виправлення тексту, як то: копіювання, вставлення, видалення фрагментів та інші;

● View (вид) – команди, що керують зовнішнім виглядом документа у вікні редактора MathCad, а також команди, що створюють файли анімації;

● Insert (Вставка) – команди вставки різних об’єктів у документи;

● Format (Формат) – команди форматування тексту, формул і графіків;

● Tools (Інструменти) – команди управління процесом обчислення;

● Symbolics (Символьні обчислення) – команди символьних обчислень;

● Window (Вікно) – команди управління розташуванням вікон з різними документами на екрані;

● Help (Довідка) – команди виклику контекстно-залежної довідкової інформації.

Панелі інструментів застосовуються для швидкого, тобто в один «клік» мишею, виконання найбільш часто вживаних команд:

● Standard (Стандартна) – призначена для виконання дії з файлами, редагування документів, вставки об'єктів та інших подібних дій;

● Formatting (Форматування) – призначена для форматування тексту і формул;

● Math (Математика) – служить для вставки математичних символів і операторів у документи;

● Recources (Додаткові ресурси) – містить список електронних книг, які розміщені в оболонці MathCad;

● Controls (Контроль) – стосується додаткового контролю роботи MathCad-документа;

● Debug (Налагодження) – з'явилася в MathCad 13, служить для трасування виконання програм.

Зауважимо, що панель Math (Математика) призначена для виклику на екран ще дев'яти панелей, за допомогою яких, власне, і відбувається вставка математичних операцій в документи:

– Calculator (Калькулятор) – вставка шаблонів основних математичних підрахунків, цифр, знаків арифметичних операцій;

– Graph (Графік) – вставка шаблонів графіків функцій;

– Matrix (Матриця) – вставка шаблонів матриць і матричних операцій;

– Evaluation (Оцінка) – оператори присвоєння значень і виведення результатів будь-яких розрахунків;

– Calculus (Обчислення) – вставка шаблонів інтегрування, диференціювання, підсумовування, добутку;

– Boolean (Булеві оператори) – вставка логічних (булевих) операторів;

– Programming (Програмування) – оператори, необхідні для створення програмних модулів;

– Greek (Грецькі літери);

– Symbolics (Символіка) – вставка операторів символьних обчислень.

До того ж у MathCad, подібно до інших програм Windows, користувач може налаштувати зовнішній вигляд панелей інструментів найбільш оптимальним для нього чином. А саме: показувати чи приховувати панелі; переміщати панелі в зручне для роботи місце екрану і змінювати їх форму; робити панелі плаваючими, і навпаки; налаштовувати основні панелі, тобто визначати набір їх кнопок.

Обчислення визначеного інтеграла у середовищі MathCad може бути як символьним, так і чисельним, на відміну від невизначеного інтегралу, для якого застосовується лише символьне обчислення. Для операції інтегрування чисельний підхід має набагато більше значення, ніж при диференціюванні. На це є дві причини. По-перше, далеко не всі функції мають первісну, яку можна виразити в елементарних функціях. По-друге, визначення первісної – це куди більш складне завдання, ніж знаходження похідної, тому MathCad з нею справляється не завжди. Безперечно, аналітично надана відповідь інформативніша, до того ж вона не містить похибки. Тому спочатку завжди потрібно прагнути провести інтегрування у символьному вигляді. І, лише в разі невдачі або якщо відповідь буде доволі громіздкою, слід звертатися до чисельних методів. Навіть тоді, коли первісна видається у вигляді громіздкого виразу, краще перерахувати його в десятковий дріб за допомогою оператора *float* або оператора чисельного виводу «=», ніж проводити інтегрування чисельно, оскільки точність при цьому буде вище, а також можливо зменшиться час розрахунку.

Система комп’ютерної математики MathCad реалізує обчислення визначеного інтегралу від будь-якої безперервної на проміжку $[a; b]$ функції на основі використання оператору інтегрування.

Наприклад, визначений інтеграл від функції $\cos(x)^3$ із границями: $\frac{\pi}{6}$ і $\frac{\pi}{2}$ може бути обчислений наступним чином. Треба натиснути у вільному місці – на екрані побачимо червоний хрестик, потім набрати знак «&». З'явиться знак інтегралу з порожніми полями для підінтегрального виразу, вибору границь інтегрування та змінної інтегрування: $\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d\blacksquare$. Отже, оператор *Definite Integral* (*Shift+7*) панелі *Calculus* містить чотири маркери, які заповнюються в повній відповідності з прийнятою в математиці формою.

В інший спосіб можна викликати шаблон для обчислення визначеного інтегралу наступним шляхом, послідовно обираючи на панелі інструментів: «*View*» → «*Toolbars*» → «*Calculus*» + «*Calculator*» (рис. 1) → натиснути кнопку «$\int_a^b$ ». Вносимо дані у шаблон. Натискаємо на поле внизу справа від знаку інтегралу і набираємо за допомогою панелі «*Calculator*»: $\frac{\pi}{6}$. Далі натискаємо на верхньому полі та після цього вводимо – $\frac{\pi}{2}$. Відтак, задано верхню та нижню границі інтегрування: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \blacksquare \, d\blacksquare = \blacksquare$.

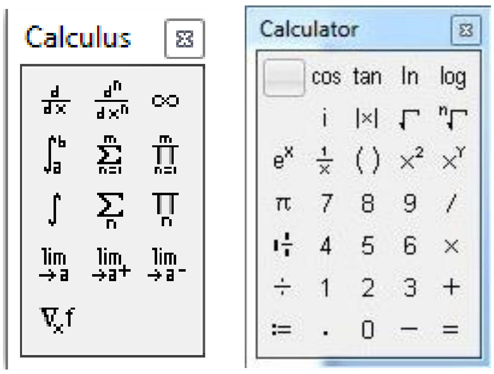


Рис. 82 Палітри математичних символів і операторів «*Обчислення*» і «*Калькулятор*»

Алгоритм знаходження визначеного інтеграла

Натисніть на полі між знаком інтеграла та диференціала – « d ». Потім надрукуйте $\cos(x)^3$, тобто вираз, який потрібно інтегрувати $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^3 d\blacksquare = \blacksquare$.

Після знаку диференціала у вільному полі наберіть « x », тобто змінну інтегрування $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^3 dx = 0.208$ (рис. 83).

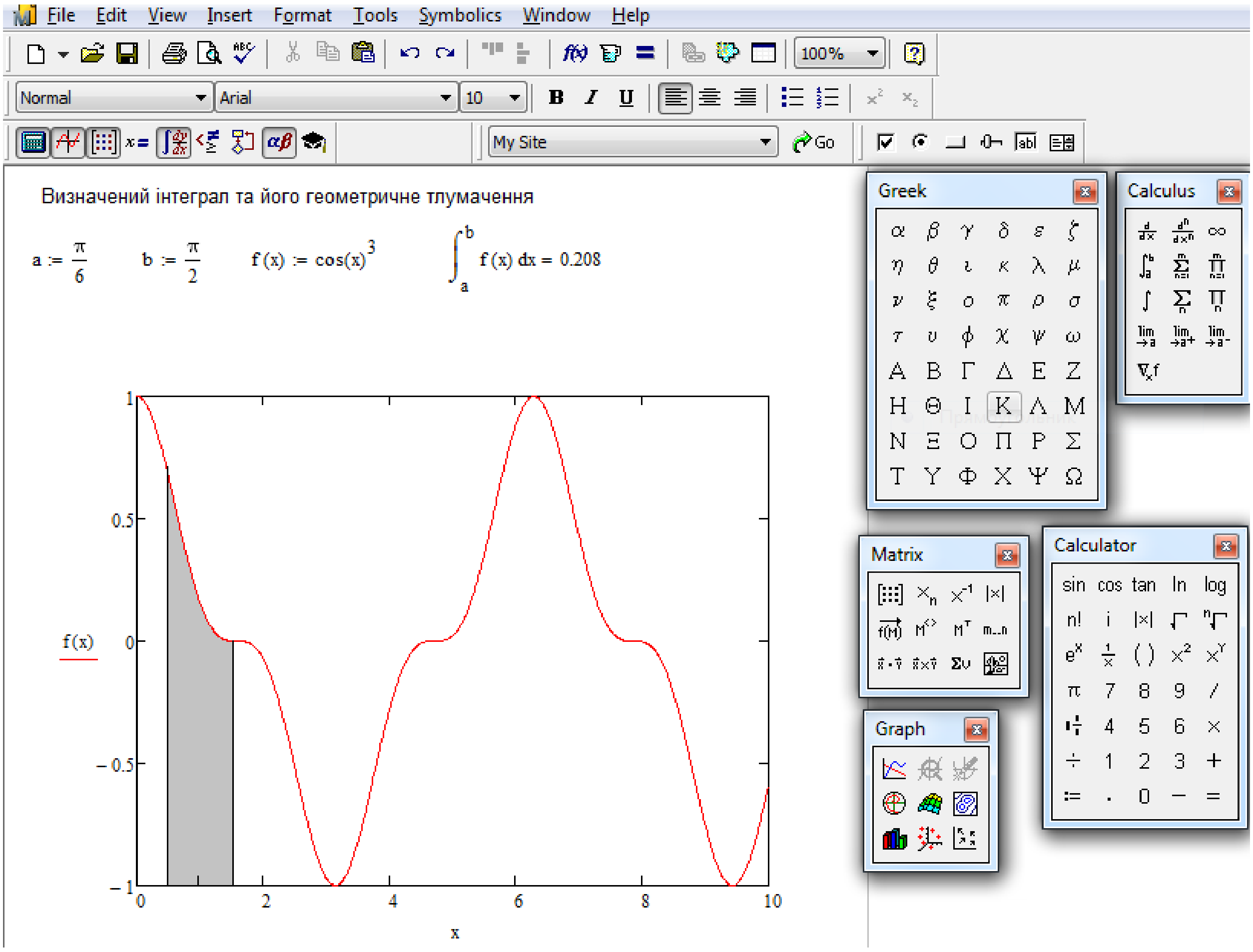


Рис. 83 Побудова графіку підінтегральної функції та обчислення інтеграла

У тому випадку, якщо системі не вдається знайти первісну функції, доводиться використовувати методи чисельного інтегрування. Чисельне інтегрування в MathCad – це більш тонка операція, ніж інтегрування аналітичне. Найчастіше, щоб отримати правильну відповідь, потрібно вірно задати точність, обрати найбільш ефективний алгоритм, проаналізувати поведінку функції і, при наявності точок розриву, надати інтеграл у вигляді суми інтегралів. Також необхідно мати загальні уявлення про алгоритми чисельного інтегрування, щоб розуміти, в яких випадках вони можуть бути використані, а в яких – ні.

● ***AutoSelect*** – автоматичний вибір системою чисельного методу інтегрування. Зручніше, якщо за замовчуванням буде встановлено саме цей пункт (рис. 84). У більшості випадків цього цілком достатньо для того, щоб інтеграл був підрахований максимально правильно і без участі користувача. Однак досвід показує, що в деяких ситуаціях, перш за все при наявності точок розриву підінтегральної функції, система може не справлятися з правильним вибором чисельного методу. Це пов’язано з тим, що, як правило, система комп’ютерної математики Mathcad автоматично обирає адаптивний метод або метод нескінченних границь. Тому при виникненні проблем з обчисленням визначеного інтеграла, в першу чергу треба спробувати змінити алгоритм його підрахунку. Для цього потрібно зробити правильний вибір з чотирьох доступних методів.

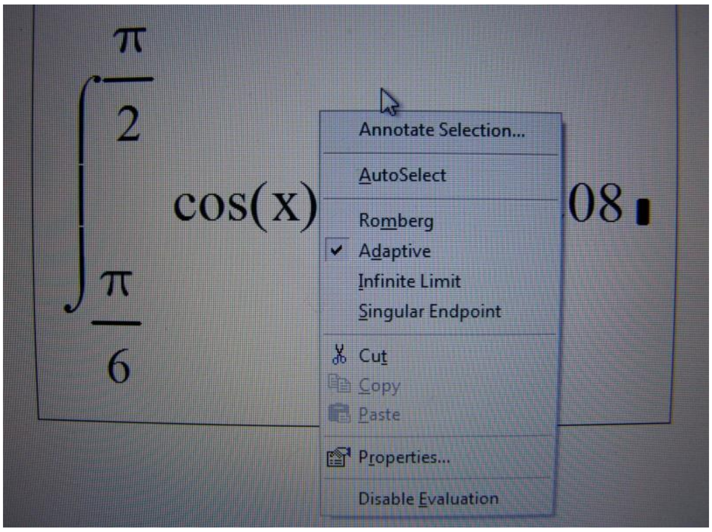


Рис. 84 Контекстне меню, що містить список альтернатив можливих алгоритмів інтегрування

Система комп’ютерної математики MathCad надає можливість обрати чисельний метод обчислення визначеного інтеграла. Задля цього достатньо вказати курсором миші на знак інтегралу і натиснути праву клавішу – з’явиться контекстно-залежне меню цієї клавіші (рис. 84), у якому виділеною крапкою позначено той метод, що використовується.

Проте, можливо встановити будь-який з наступних методів.

● *Romberg* – чисельний алгоритм інтегрування Ромберга. Система комп’ютерної математики MathCad використовує для наближеного обчислення визначеного інтеграла, при цьому поділ інтервалу інтегрування навпіл відбувається до тих пір, доки відмінність результатів не стане меншою заданої похибки.

Цей метод є доволі ефективним при застосовуванні його для обчислення інтегралів від функцій, які не мають особливостей (розривів першого і другого роду, областей різкої зміни тощо). Тому є основним у середовищі Mathcad. Спрощено його можна описати наступними кроками:

1) в якості самого першого наближення обчислюється значення площі трапеції, основи якої проведено через границі проміжку інтегрування;

2) потім запускається цикл і при кожному його повторенні крок зменшується вдвічі; при першому повторенні циклу обчислюється наближення за формулою трапецій за умови, що інтервалів інтегрування вже два; при другому повторенні крок буде зменшений в чотири рази відносно первинного, і, відповідно, площ трапецій також буде підсумовано чотири; і так далі до тих пір, доки не буде виконана умова зупинки циклу;

3) у якості умови зупинки циклу в методі Ромберга зазвичай використовують критерій різниці двох останніх наближень; у тому випадку, якщо різниця по модулю виявиться менше TOL, то цикл буде зупинений і в якості відповіді буде видано останнє наближення.

Такий опис методу Ромберга є гранично спрощеним. Реально ж даний метод, за рахунок використання певних математичних прийомів прискорення збіжності і збільшення точності, куди складніший. Проте з такого примітивного опису можна зробити кілька важливих *висновків*.

● Точність результату чисельного інтегрування завжди вище або дорівнює TOL. Тому, якщо потрібно отримати результат, правильний до сьомого знака мантиси, то TOL потрібно присвоїти значення 10^{-7}.

● Чим вище TOL, тим більше повторень повинен буде виконано у циклі алгоритму. Отже, час розрахунку різко зростає зі збільшенням TOL. Це може бути істотно в разі кратних інтегралів або при інтегруванні функції на широкому інтервалі.

● У будь-яких чисельних розрахунках виконуваних на комп’ютері є похибка, яка має властивість накопичуватися. Якщо розрахунок інтеграла потребує занадто великої кількості ітерацій, то похибка може значно перевищити рівень бажаної точності. Щоб цього не сталося, у реалізацію методу Ромберга розробниками введено обмеження на кількість ітерацій. Якщо його буде перевищено, то система покаже повідомлення про помилку: *Can not converge to a solution* (не може збігатися до розв’язання). Це означає, що не варто прагнути привласнити TOL мінімальне значення, щоб отримати максимально точний результат. При цьому інтегрування майже напевно не буде успішним. Зазвичай мінімальне значення TOL для методу Ромберга знаходиться в межах від 10^{-5} до 10^{-10}.

● Вочевидь, алгоритм Ромберга не призначений для інтегрування функцій з розривами. Причому це стосується як розривів другого роду: в разі яких чисельне інтегрування в принципі можливо лише, якщо первісна в відповідних точках неперервна або має розрив першого роду, так і розривів першого роду, при наявності яких, здавалося б, підрахунок інтеграла не повинен представляти особливої складності. Для того, щоб проінтегрувати функцію з розривами першого роду, доцільніше використати *адаптивний* алгоритм. Оскільки, якщо для цього застосувати метод Ромберга, то відповідь буде отримано з великою похибкою або ж алгоритм просто не зійдеться.

Чисельні методи інтегрування схожі в основних своїх ідеях. Тому ті висновки, які зробилено на підставі аналізу методу Ромберга, можна автоматично перенести і на інші реалізовані в Mathcad методи. Особливо важливо враховувати ключову роль системної константи TOL для отримання точного результату.

● *Adaptive* – адаптивний метод, при якому здійснюється зміна шага інтегрування у залежності від особливостей підінтегральної функції. Результат надається відповідно до заданої для змінної «TOL» похибки.

● *Infinite Limit* – спеціальний метод, який поліпшує інтегрування при наявності нескінченних границь у невласному інтегралі. Метод застосовується автоматично усякий раз у тих випадках, коли хоча б одна з границь інтегрування є нескінченною.

● *Singular Endpoint* – спеціальний метод, який ураховує сингулярність (особливість) функції у кінцевій точці або на кінцях проміжку інтегрування.

Зауважимо, що використання чисельного інтегрування в MathCad потребує дотримання певних вимог, а саме:

● границі інтегрування повинні бути дійсними, проте вираз, який потрібно інтегрувати, може бути, як, дійсним так і комплексним;

● крім змінної інтегрування, всі змінні в підінтегральному виразі повинні бути визначені раніше в іншому місці робочого документа; до того ж змінна інтегрування повинна бути простою змінної без індексу;

● якщо змінна інтегрування має розмірність, то верхня та нижня границі інтегрування повинні мати таку ж саму розмірність.

Подібно до всіх чисельних методів, точність алгоритму інтегрування в MathCad залежить від особливостей підінтегрального виразу. Якщо вираз, який потрібно інтегрувати, має особливості, розриви або швидко осцилює, чисельне рішення, знайдене MathCad, може бути неточним.

Оскільки метод інтегрування MathCad ділить інтервал на чотири підінтервали, а потім подвоює число точок розбиття, це може призвести до неправильних результатів для періодичних функцій з періодом $\frac{1}{2\pi}$ від довжини інтервалу. Щоб обійти цю проблему, треба поділити інтервал на два підінтервали, які не кратні періоду функції, та виконати інтегрування по кожному підінтервалу окремо.

Для обчислення точного значення інтеграла або для знаходження невизначеного інтеграла можуть бути використані можливості символьних обчислень MathCad.

Змінні границі інтегрування

Хоча результат інтегрування – одне число, завжди можна використовувати інтеграл спільно з дискретним аргументом, щоб отримати результати для багатьох значень параметра. Наприклад, можна задати змінну границю інтегрування. На рис. 85 показано, як це зробити.

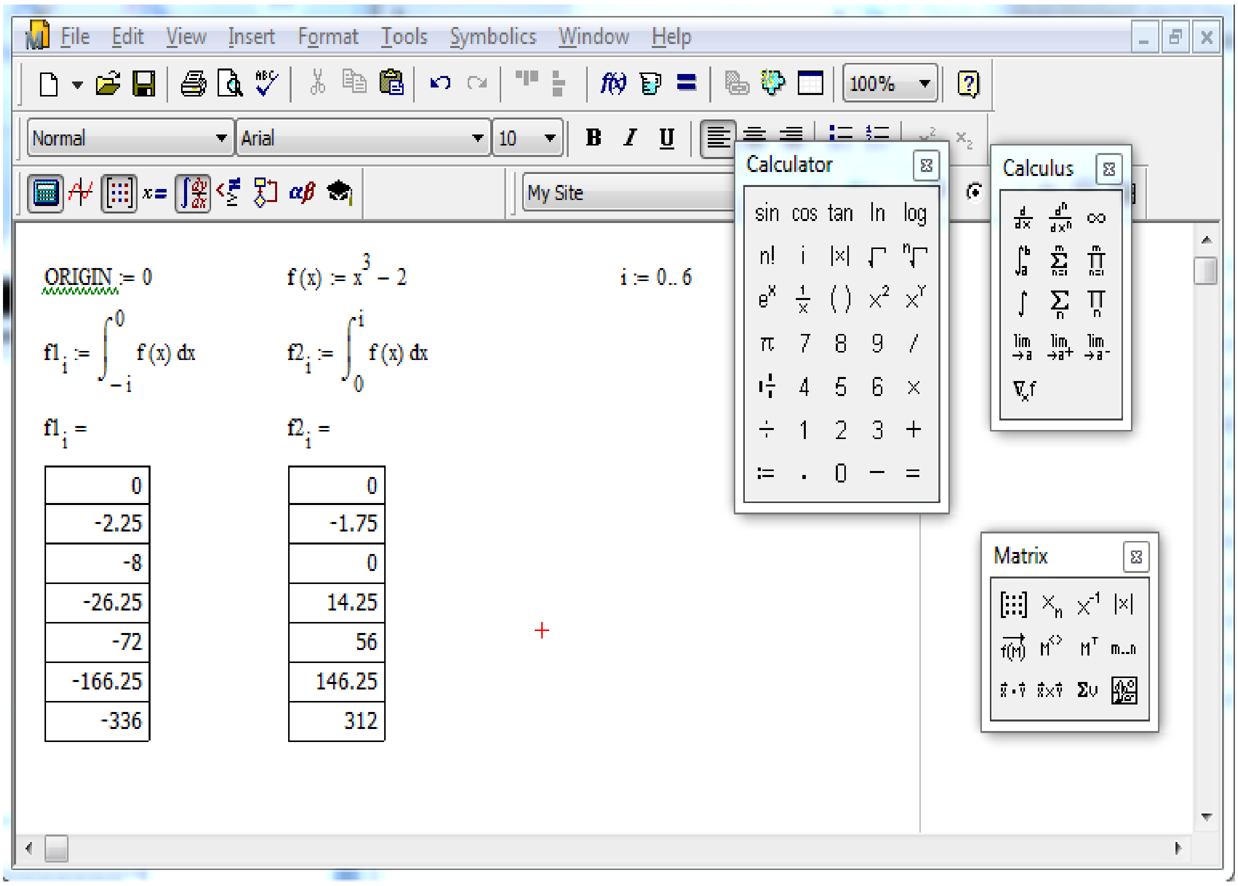


Рис. 85 Змінні границі інтегрування

Зазначимо, що обчислення, подібні показаним на рис. 85, передбачають неодноразове обчислення інтеграла. Це може призвести до значних витрат машинного часу, залежно від складності інтегралів, довжини інтервалу інтегрування і значення вбудованої змінної TOL.

Зміна точності обчислення інтегралів

За замовчуванням зазвичай задано адаптивний метод – *Adaptive*, який найчастіше забезпечує обчислення визначеного інтеграла з похибкою не більшою ніж значення TOL.

Чисельний алгоритм інтегрування MathCad робить послідовні обчислення значення інтеграла, збільшуючи точність на кожному кроці, і повертає значення, коли два останніх значення відрізняються менше, ніж на величину вбудованої змінної TOL. На рис. 86 показано, як зміна значення TOL впливає на точність обчислення інтеграла при необхідності вивести більшу кількість значущих цифр.

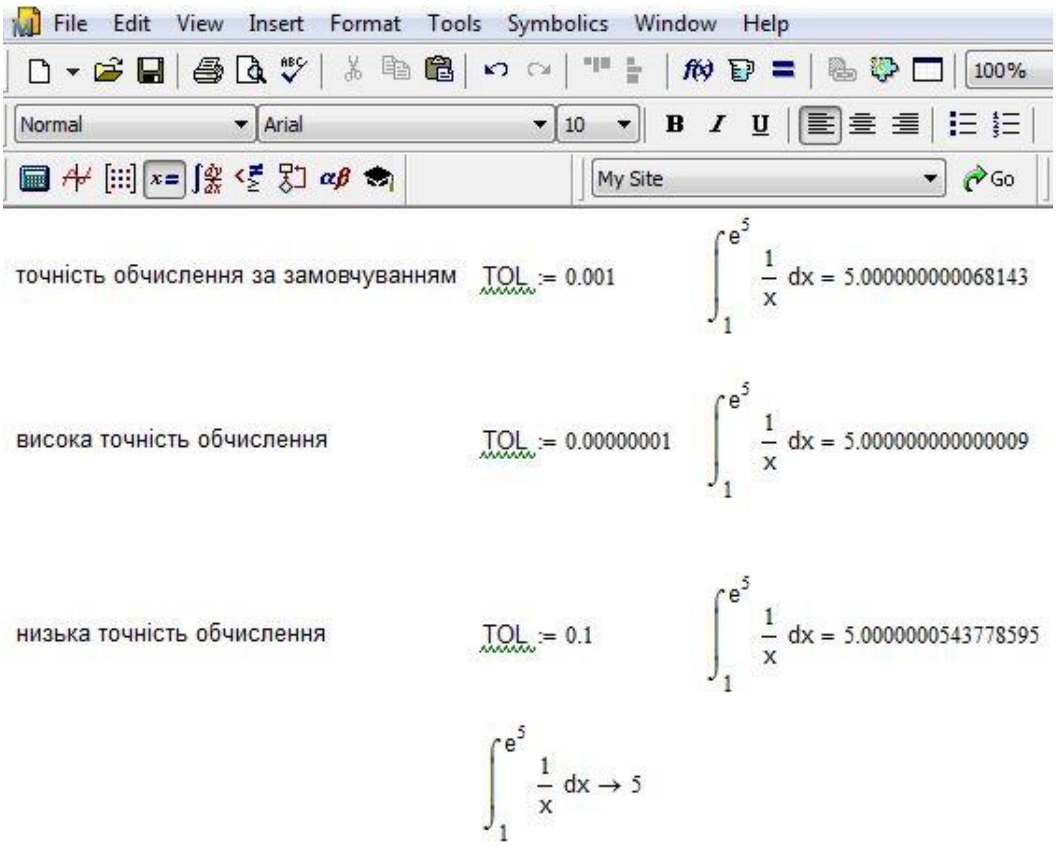


Рис. 86 Вплив значення вбудованої змінної TOL на результат обчислення визначеного інтеграла

Проте точне обчислення забезпечується при використанні оператору символьного вводу $\rightarrow$. При необхідності можна змінювати точність обчислень, включивши визначення для значення TOL безпосередньо в робочий документ, як показано на рис. 86. Можна також зробити це за допомогою команди **Вбудовані змінні** з меню **Математика**. Щоб побачити ефект зміни точності обчислень, виберіть команду **Перерахувати все** з меню **Математика** для повторного обчислення всіх виразів в робочому документі. Якщо чисельний алгоритм MathCad не досягає заданої точності, MathCad відзначає інтеграл повідомленням про помилку «*не збігається*». Ця помилка може бути викликана або функцією, яка має свої особливості, або наявністю осциляцій в інтервалі інтегрування, або занадто довгим інтервалом інтегрування. При зміні точності необхідно пам'ятати про дотримання компромісу між точністю і часом обчислення, оскільки збільшення точності вимагає збільшення часу обчислень.

У MathCad є можливість оптимізації рішень. Якщо вибрати пункт меню *Tools* → *Optimize* → *Worksheet* або *Equation* (Інструменти → Оптимізувати → Документ або Вираз), то перед обчисленням кожного виразу символьний процесор MathCad буде намагатися спростити всі вирази (або один вираз) для прискорення і уточнення обчислень.

У MathCad є два самостійних процесора: чисельний і символьний, які зазвичай не мають зв'язку між собою. При включенні оптимізації вони працюють сумісно.

Можна включити оптимізацію для обчислення одного конкретного обчислення простіше. Для цього треба натиснути правою кнопкою миші на той об'єкт, що цікавить вас і в контекстному меню обрати пункт *Optimize* (Оптимізувати). Поряд з обраним об'єктом, для якого MathCad буде самостійно шукати символьний розв'язок, або оптимізувати результат, з'явиться червона зірочка, як проілюстровано на рис. 87, тобто ознакою оптимізації є червона зірочка (*) розташована після виразу, який оптимізується.

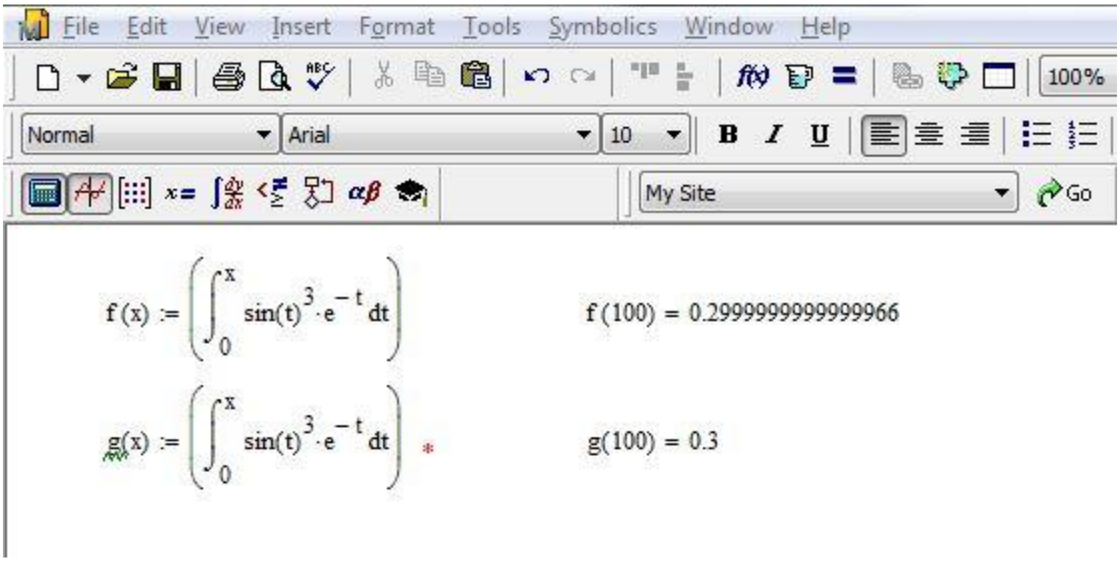


Рис. 87 Реалізація оптимізації обчислення визначеного інтеграла

Зауважимо, що оптимізація можлива тільки для виразів, що містять оператор привласнення (**: =**). Цікавими є випадки, коли, вдається знайти символьний розв'язок інтеграла, тобто знайти попередньо аналітичний вираз первісної, який необхідно застосувати для подальших розрахунків. Іноді це дозволяє різко прискорити розрахунок, адже обчислення інтегралів – найповільніша операція в MathCad.

Система комп'ютерної математики MathCad проводить символьні обчислення двома способами:

1. За допомогою меню Symbolics (Символьні обчислення) з головного меню MathCad.

2. З допомогою панелі Symbolic Keyword Toolbar (Символьна панель інструментів), що викликається відповідним значком математичної панелі.

Можливість отримання у результаті розрахунку чисельного значення визначеного інтеграла дозволяє розраховувати значення визначених інтегралів навіть тоді, коли первісна розрахована бути не може. Як було зазначено вище, оператор для розрахунку визначених інтегралів в MathCad знаходиться на панелі *Calculus* недалеко від оператора розрахунку невизначених інтегралів і відрізняється від нього наявністю границь зверху і знизу від символу інтеграла. Після того, як ви запишете підінтегральний вираз, змінну інтегрування і власне границі, можна ставити знак рівності або стрілочку для обчислення визначеного інтеграла. У першому випадку інтеграл буде вирахувано чисельно, у другому – аналітично (рис. 88).

$$f(x) := e^{-x^2} \qquad \int_0^9 f(x)\,dx = 0.886 \qquad \int_0^9 f(x)\,dx \to \frac{\sqrt{\pi}\cdot \mathrm{erf}(9)}{2} = 0.886$$

Рис. 88 Чисельне і аналітичне обчислення визначеного інтеграла

Питання про те, який спосіб обчислення інтегралів використовувати: чисельний або аналітичний, – не таке просте, як може здатися на перший погляд. Справа в тому, що аналітично визначені інтеграли обчислюються, по-перше, точніше, а по-друге, швидше, ніж чисельно. Можливим є виникнення ситуації, аналогічної тій, яку показано на рис. 88 – тобто символьний процесор не доведе процес обчислень до кінця, а залишить інтеграл у вигляді суміші числових значень і функцій. Втім, з цим, як проілюстровано, досить просто впоратися.

У застосуванні системи MathCad для розрахунку визначених інтегралів є чимало тонких моментів, які стосуються чисельних методів розрахунку інтегралів. Як зазначено вище, ці методи дозволяють розрахувати навіть такі інтеграли, які не піддаються аналітичному обчисленню. Однак використання чисельних методів інтегрування здатне призводити до значних похибок у результаті, що при вирішенні досить широкого за своєю розгалуженістю класу задач не просто небажано, а часто навіть абсолютно неприпустимо.

Наближені обчислення визначеного інтеграла

Якщо підінтегральна функція задається графічним або табличним способом неможливо застосувати формулу Ньютона-Лейбніца для обчислення визначених інтегралів. У таких випадках використовують методи наближеного інтегрування. Також методи чисельного інтегрування доцільні, коли первісна $F(x)$ не є елементарною функцією або, якщо і є елементарною функцією, але обчислення її значень досить громіздке. Чисельні методи наближеного обчислення визначеного інтеграла спираються на представлення останнього у вигляді інтегральної суми.

1. *Формула прямокутників.* У разі необхідності наближеного обчислення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ – невід'ємна та неперервна на відрізку $[a; b]$ функція. Проміжок інтегрування $[a; b]$ ділимо на n частин точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ (рис. 89). Отримані частинні криволінійні трапеції замінюємо прямокутниками. Тоді формула лівих прямокутників для наближеного обчислення визначеного інтеграла є такою:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})] + R_n, \text{ де } R_n \text{ – похибка.}$$

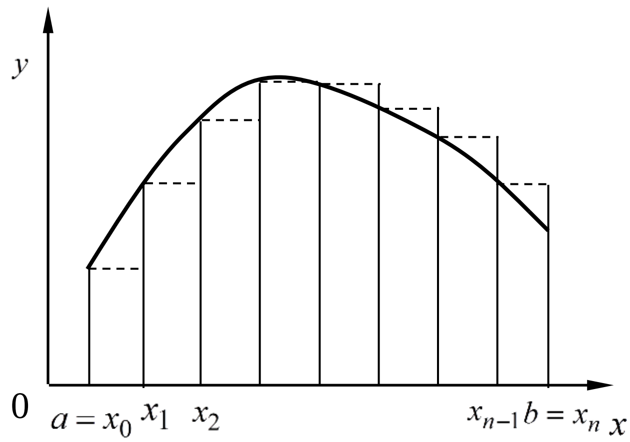


Рис. 89

Якщо за висоти частинних прямокутників узяти значення функції $y = f(x)$ у крайніх правих точках елементарних відрізків – $[x_{i-1};\ x_i]$, $i = \overline{1,\ n}$, то дістанемо формулу правих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[\ f(x_1) + f(x_2) + \ ...\ + f(x_n)] + R_n, \text{ де } R_n \text{ – похибка.}$$

У випадку монотонного зростання функції $y = f(x)$ на сегменті $[a; b]$ формули лівих і правих прямокутників дають наближене значення інтеграла відповідно з недостачею і з надлишком.

2. *Формула трапецій*. Якщо криволінійні трапеції замінити – звичайними, то отримаємо формулу трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right] + R_n,$$

де R_n – похибка.

Зауваження. Формула трапецій базується на наближенні функції $y = f(x)$ до кусково-лінійної вписаної ламаної.

2. *Формула парабол (формула Сімпсона)*.

Задля пояснення наближеного обчислення визначеного інтеграла методом парабол розіб’ємо відрізок $[a; b]$ на парне число рівних частин $n = 2m$ з кроком $h = \dfrac{(b-a)}{n}$ точками $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, ... , $x_{2i-1} = x_{2i-2} + h$, $x_{2i} = x_{2i-1} + h$, ... , $x_n = b$, де $i = \overline{1, m}$.

Як це показано на рис. 90, дві суміжні елементарні криволінійні трапеції, що спираються на спарені відрізки $[x_{2i-2}; x_{2i-1}]$ та $[x_{2i-1}; x_{2i}]$, наближено замінимо однією криволінійною трапецією, обмеженою зверху дугою вертикальної параболи $y = \alpha_i(x - x_{2i-1})^2 + \beta_i(x - x_{2i-1}) + \gamma_i$. Ця парабола проходить через три верхні вершини даних частинних трапецій, внаслідок чого утворюється лінійна алгебраїчна система, з якої однозначно знаходяться невідомі коефіцієнти α_i, β_i, γ_i, а саме:

$$\alpha_i = \frac{(y_{2i-2} - 2y_{2i-1} + y_{2i})}{2h^2};\ \beta_i = \frac{(y_{2i} - y_{2i-2})}{2h};\ \gamma_i = y_{2i-1}.$$

Тоді площа ΔS_{pi} елементарної параболічної трапеції:

$$\Delta S_{pi} = \int_{-h}^{h}\left(\alpha_i(x - x_{2i-1})^2 + \beta_i(x - x_{2i-1}) + \gamma_i\right)dx = \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}).$$

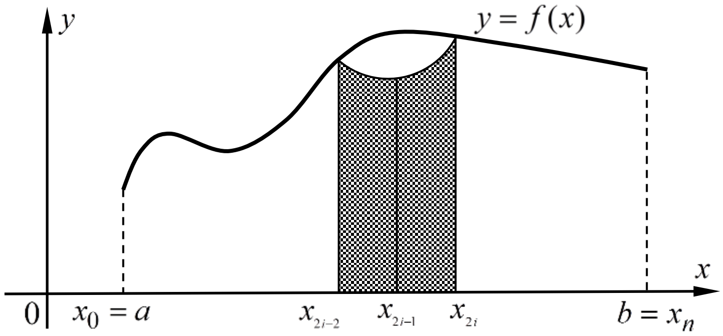


Рис. 90 Наближення графіку функції квадратичними параболами на елементарному відрізку розбиття

Підсумовуючи частинні площі ΔS_{pi} за всіма $i = \overline{1, m}$, отримуємо наближений вираз для загальної площі S криволінійної трапеції:

$$S \approx \sum_{i=1}^{m} \Delta S_{pi} = \sum_{i=1}^{m} \frac{h}{3}\left(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}\right).$$

Відтак, *формула Сімпсона* для наближеного обчислення визначеного інтеграла буде такою:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n} \cdot \left(y_0 + y_k + 4\left(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + ... + y_{k-1}\right)\right) + R_n,$$

де R_n – похибка наближеного обчислення.

Відмітимо, що в основі формули Сімпсона лежить неперервне кусково-параболічне наближення підінтегральної функції $f(x)$ вписаною кривою.

Якщо на відрізку $[a; b]$ існує обмежена похідна четвертого порядку $f^4(x)$, то реальна абсолютна похибка $\Delta_0 = |R_n|$ обчислення визначеного інтеграла за формулою парабол оцінюється на основі граничної абсолютної похибки Δ наступним чином:

$\Delta_0 = |R_n| \le \Delta = \dfrac{(b-a)^5}{180n^4} M_4$, де $M_4 = \max\limits_{x \in [a;b]} \left| f^4(x) \right|$. Тобто, похибка формули Сімпсона має порядок $\dfrac{1}{n^4}$.

Зауваження. Усі розглянуті формули дозволяють отримати більш точний результат обчислення, при густішому розташуванню точок пунктуації у процесі розбиття, тобто $R_n \to 0$, якщо $n \to \infty$. При одному й тому ж значенні n формула Сімпсона – найбільш точна за метод прямокутників чи трапецій.

Приклад 90. Обчислити за формулою Сімпсона наближене значення визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ для $n=16$, також задачу вирішити аналітично в системі MathCad. Метод Сімпсона, відомий також як метод парабол, розглянемо на прикладі обчислення інтеграла: $\int\limits_{-4}^{12} \sqrt{x^3+64}\,dx$.

Розглянемо рішення цієї задачі в середовищі MathCad. Спочатку треба ввести початок a і кінець b проміжку інтегрування, кількість точок розбиття відрізка інтегрування – n (метод вимагає, щоб увесь інтервал інтегрування було розбито на парне число однакових відрізків: $a:=-4,\ b:=12,\ n:=16.$ Потім ввести формулу для знаходження кроку інтегрування h: $h:=\dfrac{b-a}{n}$, задля подальшого для знаходження точок розбиття відрізка $[a;b]$:

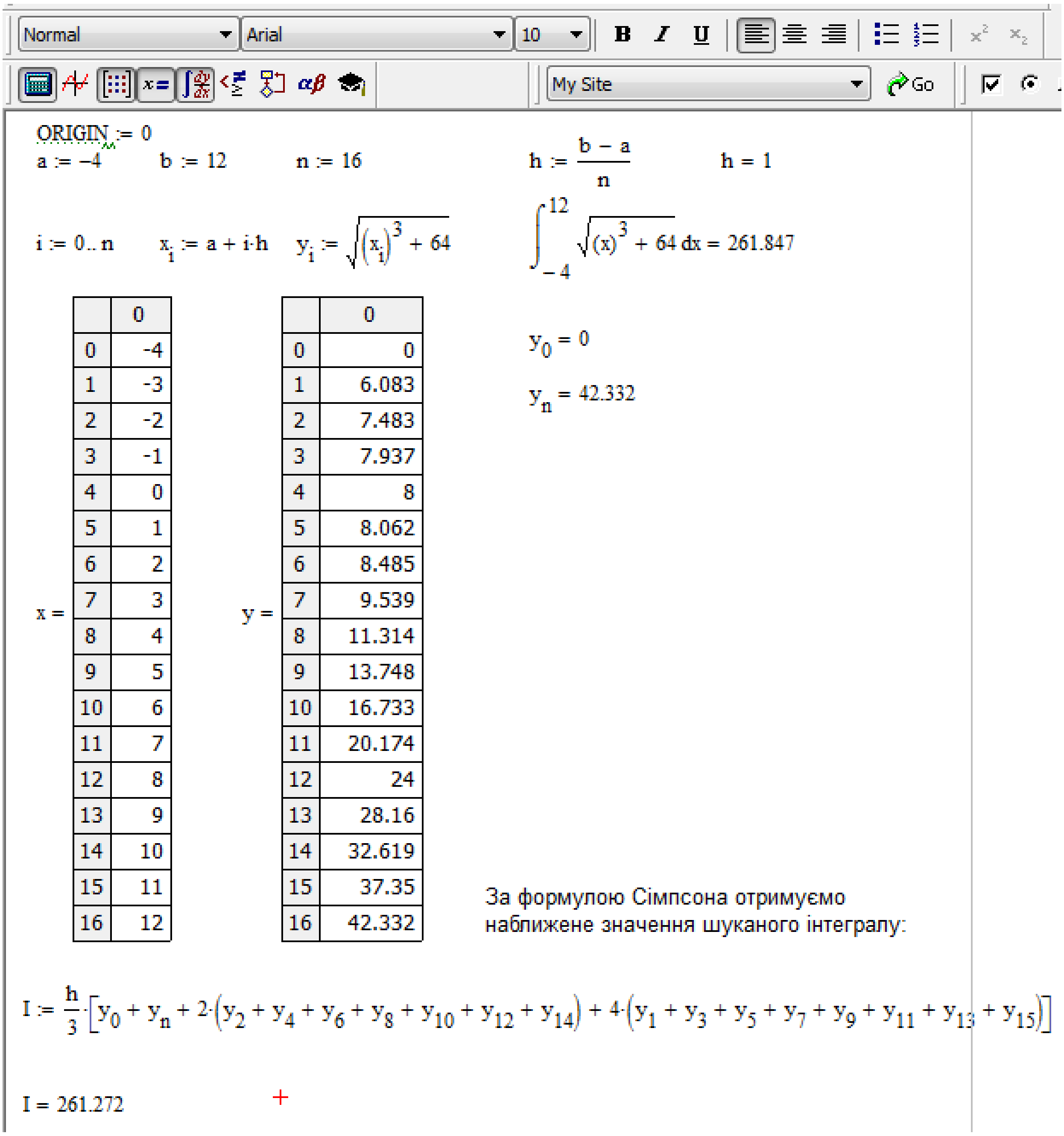
$i:=0\ ..\ n,\quad x_i:=a+i\cdot h.$

Для отримання таблиці значень x треба набрати: «$x=$». На екрані з'являється результат у вигляді таблиці (рис. 91). Далі вводимо формулу для обчислення підінтегральної функції: $y=\sqrt{x^3+64}$. А для отримання таблиці значень підінтегральної функції треба ввести: «$y=$». При цьому на екрані з'являється таблиця значень y. Нарешті треба ввести формулу Сімпсона:

$$\mathrm{I}:=\frac{h}{3}\cdot\left(y_0+y_n+2\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} y_{2i}+4\cdot\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} y_{2i+1}\right).$$

Для отримання результату слід набрати: «int =». Після цього на екрані з’являється шуканий результат.

Знайдемо значення визначеного інтеграла в інший спосіб. Для цього необхідно набрати за допомогою шаблону математичних операцій заданий визначений інтеграл: $\int_{-4}^{12} \sqrt{x^3 + 64}\, dx$. Для отримання відповіді слід набрати за допомогою клавіатури знак «=». На екрані з’являється фактично той самий результат, який попередньо було отримано за формулою Сімпсона.



$ORIGIN := 0$

$a := -4 \quad b := 12 \quad n := 16 \quad h := \frac{b-a}{n} \quad h = 1$

$i := 0..n \quad x_i := a + i \cdot h \quad y_i := \sqrt{(x_i)^3 + 64} \quad \int_{-4}^{12} \sqrt{(x)^3 + 64}\, dx = 261.847$

$x =$

	0
0	-4
1	-3
2	-2
3	-1
4	0
5	1
6	2
7	3
8	4
9	5
10	6
11	7
12	8
13	9
14	10
15	11
16	12

$y =$

	0
0	0
1	6.083
2	7.483
3	7.937
4	8
5	8.062
6	8.485
7	9.539
8	11.314
9	13.748
10	16.733
11	20.174
12	24
13	28.16
14	32.619
15	37.35
16	42.332

$y_0 = 0$

$y_n = 42.332$

За формулою Сімпсона отримуємо наближене значення шуканого інтегралу:

$$I := \frac{h}{3} \cdot \left[y_0 + y_n + 2 \cdot (y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10} + y_{12} + y_{14}) + 4 \cdot (y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11} + y_{13} + y_{15})\right]$$

$I = 261.272$

Рис. 91 Реалізація методу парабол у середовищі MathCad

Індивідуальні домашні завдання

Варіант №1

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$ б) $\int\limits_0^{16} \sqrt{256-x^2}dx$ в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$

г) $\int\limits_1^{e} \frac{\cos\ln x}{x}dx$ д) $\int\limits_{-2}^{0} \left(x^2+5x+6\right)\cos 2x dx$ е) $\int\limits_0^{1} xe^{-2x}dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=x^2+1;$ $x+y=3;$ б) $\begin{cases} x=5\cos^3 t, \\ y=3\sin^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi;$ в) $\rho^2=4\cos 4\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=\ln x,\ x\in\left[\sqrt{3};\ \sqrt{15}\right]$ б) $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t); \end{cases}$ $t\in[0;\ \pi]$ в) $\rho=2(1-\cos\varphi),$ $\varphi\in\left[-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $3x-y=0,$ $3x-4y=0,$ $y=3$ б) $y=x^3,\ y=\sqrt{x}$ в) $\frac{x^2}{9}+y^2=1,$ $z=y,\ z=0\ (y\ge 0)$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y^2 = 2x$, «x» змінюється від абсциси вершини параболи до $x = 1{,}5$

б) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t}{3}\left(t^2 - 3\right); \end{cases}$ $0 \le t \le \sqrt{3}$

в) $\rho = 50\sqrt{\cos 2\varphi}$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{16x^4 + 1}$ б) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2 - 4x}}$ в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \arcsin 2t\,dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + x^4}}\,dx .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/c$.

а) Знайти роботу витрачену при стисканні пружини на $0{,}03\,м$, якщо для стискування її на $0{,}005\ м$ потрібно прикласти силу в $50\ H$.

б) Пластина у формі параболічного сегменту з основою $2a$ $\left(a = 0{,}5\ м\right)$ і заввишки $H = 3м$ занурена вертикально в рідину, густина якої – $\rho = 0{,}8\ \frac{г}{см^3}$ так, що основа сегменту лежить на поверхні. Знайти величину сили тиску рідини на пластину.

в) Знайти статичні моменти і моменти інерції дуги астроїди $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$, що знаходиться у першій чверті координатної площини.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №2

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^3+3x+1\right)^2}$ б) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$

г) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$ д) $\int\limits_{-1}^{0}\left(x^2+4x+3\right)\sin 4x dx$ е) $\int\limits_0^3 \ln(x+3)dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y^2=2x+1,$
$x-y-1=0;$

б) $\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t), \end{cases}$
$0\le t\le 2\pi,\ y=0;$

в) $\rho=\dfrac{6}{\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{3}\right)},$
$x=0,\ y=0.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=e^x+6,$
$x\in\left[\ln\sqrt{8};\ln\sqrt{15}\right]$

б) $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3(2\sin t-\sin 2t); \end{cases}$
$t\in[0;\ 2\pi]$

в) $\rho=3(1+\sin\varphi),$
$\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{6};\ 0\right]$

4. Знайти об'єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $2x-y=2,$
$x=3,\quad y=0$

б) $y=\arcsin\left(\dfrac{x}{5}\right),$
$y=\arcsin x,\ y=\dfrac{\pi}{2}$

в) $z=x^2+4y^2,$
$z=2$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y=\dfrac{x^3}{3},$
$-2\le x\le 2$

б) $x=\dfrac{t^3}{3},\ y=4-\dfrac{t^2}{2};$
між точками перетину з осями координат

в) равлика Паскаля
$\rho=2+\cos\varphi$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1}$ б) $\int\limits_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$ в) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{xdx}{x^2-1}$.

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dt}\int\limits_t^{t+2} arctg\, 2x\, dx$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Кутова швидкість обертання тіла виражається формулою $\omega=\sqrt{3+2t}$ рад/с. Знайти кут повороту тіла за перші 3 с від початку руху.

б) Котел, що має форму половини еліпсоїда обертання з півосями: $a=2\ м$ $і$ $c=3\ м$, наповнений рідиною, густина якої – $\rho=0{,}4\ \frac{г}{см^3}$. Обчислити роботу, яку потрібно виконати, щоб викачати рідину з котла.

в) Сила змінного струму змінюється згідно закону: $I=I_0\sin\frac{2\pi}{T}t$, де $I_0=2(A)$ – амплітудне значення струму, $T=0{,}02(c)$- період. Знайти кількість електрики $q=\int\limits_{t_1}^{t_2} Idt$, що проходить через поперечний переріз провідника від $t_0=0$ до $t=\frac{T}{2}$.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №3

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int_0^1 \frac{4arctgx - x}{1+x^2}dx$ б) $\int_0^5 \frac{dx}{\left(25+x^2\right)\sqrt{25+x^2}}$ в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{9\cos^2 x + 25\sin^2 x}$

г) $\int_0^1 \frac{x^3}{3+2x^8}dx$ д) $\int_0^{\pi}\left(2-3x^2\right)\cos 4x dx$ е) $\int_0^{0,5}\left(x^4 + \arcsin x\right)dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y = 2 - x^2,\ y^2 = x^3;$ б) $\begin{cases} x = \frac{t}{3}(6-t), \\ y = \frac{t^2}{8}(6-t); \end{cases}$ в) $\begin{array}{l} \rho = 2\sqrt{3}a\cos\varphi, \\ \rho = 2a\sin\varphi. \end{array}$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $\begin{array}{l} y = \ln\frac{5}{2x}, \\ x \in \left[\sqrt{3};\ \sqrt{8}\right] \end{array}$ б) $\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4(\cos t - t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t); \end{cases} \\ t \in [0;\ 2\pi] \end{array}$ в) $\begin{array}{l} \rho = 4(1-\sin\varphi), \\ \varphi \in \left[0;\ \frac{\pi}{6}\right] \end{array}$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Ox, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Oy, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y^2 = 4x,\ y^2 = x^3$ б) $\begin{array}{l} y = x^2,\ x = 2, \\ y = 0 \end{array}$ в) $\begin{array}{l} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \\ z = 0,\ z = 3 \end{array}$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі Ox – навколо осі Ox; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі Ox; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а)	$y^2 = 4x$, «x» змінюється від абсциси вершини параболи до $x = 2$	б)	*однієї арки циклоїди* $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$	в)	кола $\rho = 6\sin\varphi$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt[3]{\left(x^2+4x+1\right)^4}}$ б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{tgx}}{\cos 2x}\,dx$ в) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{2dt}{\sqrt{1-4t^2}}$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int_0^1 x(1-x)^2\,dx\ .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Сила пружності пружини, розтягнутої на $0{,}05\ м$, дорівнює $3\ H$. Знайти роботу, яку потрібно виконати, щоб розтягнути цю пружину на $0{,}07\ м$.

б) Пластина завтовшки $d = 0{,}5\ см$, що має форму прямого параболічного сегменту з основою $2a\ (a = 1м)$ і заввишки $H = 1{,}5м$, обертається навколо своєї осі симетрії з постійною кутовою швидкістю $\omega = 5\pi c^{-1}$. Густина матеріалу пластини $\rho = 2{,}2\ \frac{г}{см^3}$. Обчислити кінетичну енергію пластини.

в) Знайти середнє значення функції: $y = x^3 + 4x$ на відрізку $[1;\ 2]$.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №4

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{x^2+4}$ б) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ в) $\int\limits_{-\frac{2\pi}{3}}^0 \frac{\cos x dx}{1-\cos x-\sin x}$

г) $\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{6-5\sin x}dx$ д) $\int\limits_0^{\pi} \left(-4x^2+6\right)\cos 5x dx$ е) $\int\limits_1^2 x\log_2 x dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=x,\ y=x+\sin^2 x,$ $0\le x\le \pi;$ б) $\begin{cases} x=a\cos t\left(1+\cos t\right), \\ y=a\sin t\left(1+\cos t\right), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi;$ в) $\rho=2-\cos\varphi,$ $\rho=\cos\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=e^x+13,$ $x\in\left[\ln\sqrt{15};\ \ln\sqrt{24}\right]$ б) $\begin{cases} x=10\cos^3 t, \\ y=10\sin^3 t; \end{cases}$ $t\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ в) $\rho=8\cos\varphi,$ $\varphi\in\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y=-x^2+5x-6,$ $y=0$ б) $y=x^2+1,\ y=x,$ $x=0,\quad x=2$ в) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36}=-1,$ $z=12$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y=x^3,$ між прямими $x=\pm\frac{2}{3}$ б) Астроїди $\begin{cases} x=5\cos^3 t, \\ y=5\sin^3 t; \end{cases}$ в) кола $\rho=\cos\varphi$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4+1}}$ б) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{\left(3+\frac{1}{x}\right)}}{x^2} dx$ в) $\int\limits_4^{+\infty} \frac{xdx}{7x^2+4}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{6x^2} \ln^2 \frac{t+1}{3-t} dt$.

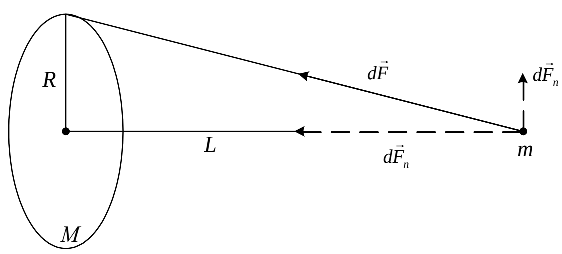
8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{2\sin x + 3\cos x}{2+x^2} dx \ .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Резервуар має форму параболоїда обертання. Через який час рідина, що наповнює резервуар, витече із нього через маленький отвір у вершині, якщо радіус основи резервуару – $R = 20\ см$, висота – $H = 50\ см$, площа отвору $S_{отв} = 1\ см^2$, а коефіцієнт швидкості витікання σ, який залежить від в'язкості рідини становить – $\sigma = 0{,}9$?

б) Встановити, з якою силою – F, тонке дротяне кільце маси $M = 1000$ кг притягує матеріальну точку $m = 0{,}001$ г, розташовану на його осі на відстані $L = 1$ м від центру кільця, якщо радіус кільця дорівнює: $R = 2$ м.



в) Знайти координати центру ваги фігури, обмеженої лініями $x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0,\ \ y = \cos x$.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №5

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}$ в) $\int\limits_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{\sin 2xdx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$

г) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\left(\ln x\right)^2}{6x}dx$ д) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2+3\right)\sin 2xdx$ е) $\int\limits_{1}^{e^2} \frac{\ln xdx}{x^2}$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=x^2,\ x=-1,$ $x=2,\ y=0;$ б) $\begin{cases} x=t^2, & y=0 \\ y=\dfrac{t-t^2}{3}; \end{cases}$ в) $\rho=2\cos\varphi,$ $\rho=2\cos\varphi+2\sin\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=-\ln\cos x,$ $x\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{6}\right]$ б) $\begin{cases} x=3\left(t-\sin t\right), \\ y=3\left(1-\cos t\right); \end{cases}$ $t\in\left[\pi;\ 2\pi\right]$ в) $\rho=2\sin\varphi,$ $\varphi\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{6}\right]$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $2x-x^2-y=0,$ $2x^2-4x+y=0$ б) $y=\sqrt{x-1},\ y=0,$ $y=1,\ \ x=0,5$ в) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1,$ $z=1,\ z=0$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y=\dfrac{x^3}{3},\ |x|\le 1$ б) $\begin{cases} x=e^t\sin t, \\ y=e^t\cos t; \end{cases}$ $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ в) кола $\rho=4\sin\varphi$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}dx$ б) $\int\limits_0^1 \frac{2e^{1-\frac{2}{\pi}\arcsin x}}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx$ в) $\int\limits_{-4}^{2} \frac{dx}{(x+3)^2}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{\sin x}^{\cos x}\left(\cos^4 t+3\right)dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}dx \ .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\,м/с$.

а) Знайти роботу, яку треба витратити, щоб розтягнути пружину на $0{,}06\,м$, якщо сила $100\,Н$ розтягує пружину на $0{,}01\,м$.

б) Знайти координати центру ваги параболічного сегменту, обмеженого лініями $y=2-x^2$, $y=0$.

в) Пластина у формі прямого параболічного сегменту з основою $2a$ $(a=1м)$ і заввишки $H=1{,}5м$ занурена вертикально в рідину із густиною – $\rho=0{,}8\,\frac{г}{см^3}$ так, що вісь параболи лежить на поверхні. Знайти величину тиску рідини на кожну із сторін пластини.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп’ютерної математики MahtCad.

Варіант №6

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x + \sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3} dx$ б) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$ в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$

г) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} dx$ д) $\int\limits_{-1}^{0} \left(x^2-2x-3\right)\cos 3x dx$ е) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=-x,\ y=2x-x^2;$ б) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t; \end{cases}$ в) $\rho = 2a(\cos\theta + 2).$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=1-\ln\sin x,$ $x\in\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right]$ б) $\begin{cases} x=3(\cos t + t\sin t), \\ y=3(\sin t - t\cos t); \end{cases}$ $t\in\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]$ в) $\rho=\cos\varphi,$ $\varphi\in\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y=3\sin x,\ y=\sin x,$ $0\le x\le\pi$ б) $y=\ln x,\ x=2,$ $y=0$ в) $x^2+y^2=9,\ z=y,$ $z=0\ \ (y\ge 0)$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y^2=2x-2$, між точками перетину з прямою $x=3$ б) $\begin{cases} x=a(\cos t - \cos 2t), \\ y=a(\sin t - \sin 2t); \end{cases}$ в) кола: $\rho=2\sin\varphi$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{16x^4 - 1}}$ б) $\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$ в) $\int_0^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx} \int_1^{\cos x} \frac{dt}{2t^2 + 1}$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x + 100} dx.$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\, м/с$.

а) Знайти координати центру ваги параболічного сегменту, обмеженого лініями $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

б) Яку роботу потрібно виконати, щоб насипати купу піску конічної форми з радіусом основи $R = 12\,м$ і заввишки $H = 15\,м$? Густину піску вважати рівною – $\rho = 1300\,\frac{кг}{м^3}$.

в) Знайти середнє значення функції: $y = \sin 3x$ на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №7

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx$ б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\left(-4x^2+14x+11\right)dx}{(x+1)^2(x-6)}$ в) $\int\limits_{2arctg3}^{2arctg4} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

г) $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}dx$ д) $\int\limits_{-3}^{0}\left(x^3+4x+3\right)\sin x dx$ е) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(4x-2)\cos 2x dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=\sin x, y=0,$ $0 \le x \le \pi;$ б) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$ в) $\rho = a\sin 2\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=\ln\left(x^2-1\right),$ $x\in[2;\ 3]$ б) $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t); \end{cases}$ $t\in[0;\ \pi]$ в) $\rho = 8\sin\varphi,$ $\varphi \in \left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y=5\cos x,\ y=\cos x,$ $x=0,\ x\ge 0$ б) $y=(x-1)^2,\ y=1$ в) $z=x^2+9y^2,\ z=3$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) дуги параболи $2x=y^2,$ між точками перетину з прямою $2x=3$ б) кола $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t; \end{cases}$ в) $\rho = \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\operatorname{arctg}2x}}{1+4x^2}dx$ б) $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$ в) $\int_{-\infty}^{-3}\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int_0^{3x}\frac{\arccos(6t+1)}{5t^2+1}dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx.$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Енергія, що виділяється за час T при проходженні струму I в електроліті з опором r, визначається за формулою $W=\int_0^T rI^2dt$. Знайти кількість енергії, виділену на опорі $r=100\ Ом$ за період $T=0{,}02\ с$, якщо $I=I_m\sin(\omega t+\varphi)$, $I_m=3A,\ \omega=100\pi c^{-1}$.

б) Пластина завтовшки $d=0{,}5\ см$, що має форму рівнобедреного трикутника з основою $2a=50\ см$ і заввишки $H=17\ см$, обертається навколо своєї основи зі сталою кутовою швидкістю $\omega=5\pi\ c^{-1}$. Густина матеріалу пластини $\rho=2{,}2\ \frac{г}{см^3}$. Знайти кінетичну енергію пластини.

в) Використовуючи визначений інтеграл, обчислити границю нескінченної суми: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)$.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп’ютерної математики MahtCad.

Варіант №8

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_1^4 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}dx$ б) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$ в) $\int\limits_{arctg\sqrt{5}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$

г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^4-16}$ д) $\int\limits_{-1}^0 \left(5-3x^2\right)\sin 5x dx$ е) $\int\limits_0^1 x\cdot arctg x dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=4x-x^2,\ y=0;$ б) $\begin{cases} x=at-b\sin t,\ 0\le t\le 2\pi, \\ y=a-b\cos t,\ y=0; \end{cases}$ в) $\rho=a\sin 3\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=2-e^x,$ $x\in\left[\ln\sqrt{3},\ \ln\sqrt{8}\right]$ б) $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t; \end{cases}$ $t\in\left[0,\ \frac{\pi}{6}\right]$ в) $\rho=1-\sin\varphi,$ $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{6}\right]$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y=\sin^2 x,$ $x=\frac{\pi}{2},\ y=0$ б) $y^2=x-2,\ y=0,$ $y=x^3,\ y=1$ в) $\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=1,$ $z=0,\ z=3$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y=\sqrt{x}$ між точками перетину з прямою $y=x$ б) *однієї арки циклоїди* $\begin{cases} x=2\left(t-\sin t\right), \\ y=2\left(1-\cos t\right); \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ в) кола $\rho=3\cos\varphi$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}$ б) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\ln\left(3x-1\right)}{3x-1}dx$ в) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{3}^{5x^3} \frac{t^3}{\sqrt{6+t}}dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{0}^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\, dx.$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\, м/с$.

а) Швидкість руху матеріальної точки визначається формулою $v=\sqrt[7]{25+x}$ м/с. Знайти шлях, який подолає точка за перші 2 с, починаючи від початку руху. Чому дорівнює середня швидкість на цьому проміжку?

б) Воронка має форму конуса, оберненого вершиною вниз. Висота воронки $H=2\,м$, радіус основи $R=1{,}2\,м$. Вона заповнена повністю рідиною густина якої становить: $\rho=0{,}555\,\frac{г}{см^3}$. Знайти роботу, яку потрібно виконати, щоб викачати всю рідину з воронки.

в) Знайти центр ваги однорідної дуги кола $x^2+y^2=81$, розташованої в першій чверті.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №9

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$ б) $\int_0^1 \frac{x^4dx}{\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ в) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos xdx}{\left(1+\cos x-\sin x\right)^2}$

г) $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{6-5\cos x}dx$ д) $\int_{-2}^{-1} \left(2-3x^2\right)e^{3x}dx$ е) $\int_0^1 x^5 arctgxdx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=e^x, y=e^{-x},$ $x=1;$ б) $\begin{cases} x=12\cos t+5\sin t, \\ y=5\cos t-12\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi;$ в) $\rho = a\cos\varphi,$ $\rho = a\sin\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$ $0\le \text{x} \le 1.$ б) $\begin{cases} x=4\left(t-\sin t\right), \\ y=4\left(1-\cos t\right); \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ в) $\rho=2\left(1-\cos\right)\varphi$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $x=\sqrt[3]{y-2},$ $x=1,\ \ y=1$ б) $y=x^3,\ y=x^2$ в) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{64}=-1,$ $z=16$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=9^{\frac{2}{3}}$ б) *однієї арки циклоїди* $\begin{cases} x=5\left(t-\sin t\right), \\ y=5\left(1-\cos t\right); \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ в) лемніскати Бернуллі: $\rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi}$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{4dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$ б) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$ в) $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{da}\int\limits_{a}^{b} \operatorname{arcctg}\left(x^4\right)dx$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{0}^{10} \frac{e^{-5x}}{x^3+1}\,dx.$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Обчислити роботу, що здійснюється при стискуванні пружини на $0{,}08\ м$, якщо для стискування її на $0{,}01\ м$ потрібна сила в $25\ Н$.

б) Резервуар має форму еліпсоїда обертання з півосями a і c (еліпсоїд розташований таким чином, що його більша напіввісь – вертикальна). Через який час вода, що наповнює резервуар, витече з нього через маленький отвір у вершині, якщо $a = 20см,\ c = 50см$, площа отвору $S_{отв} = 1\ см^2$, а коефіцієнт швидкості витікання σ, який залежить від в’язкості рідини становить – $\sigma = 0{,}97$?

в) Знайти координати центру ваги півкола $x^2 + y^2 \le 25,\ \ y \ge 0,\ \ (\gamma = 2)$, де γ – густина.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп’ютерної математики MahtCad.

Варіант №10

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}dx$ б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$ в) $\int\limits_{2arctg2}^{2arctg3} \frac{dx}{3\sin x-5\cos x-5}$

г) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x-(\mathrm{arctg})^4}{1+x^2}dx$ д) $\int\limits_{0}^{1} x\arcsin 2x dx$ е) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=\ln x,\ y=\ln^2 x;$ б) $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi;$ в) $\rho=4\sin^2\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=ax^2,$ $0\le x\le 1.$ б) $\begin{cases} x=2R\cos\frac{t}{3}+R\cos\frac{2t}{3}, \\ y=2\sin\frac{t}{3}-\sin\frac{2t}{3}; \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ в) $\rho=a\varphi,$ $0\le\varphi\le\pi$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y=xe^x,$ $y=0,\ \ x=1$ б) $y=\arccos\left(\frac{x}{5}\right),$ $y=\arccos\left(\frac{x}{3}\right),\ y=0$ в) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1,$ $z=2,\ z=0$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

астроїди:

а) $y = x^2,\ x = y^2$ б) $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t; \end{cases}$ в) кардіоїди: $\rho = 10(1 - \sin\varphi)$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{\left(x^3+8\right)^4}}$ б) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}$ в) $\int\limits_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2 - 4}}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{db}\int\limits_a^{4b} \sin\left(t^3+2\right)dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}\ .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Електричний заряд q_1, який знаходиться на початку координат, відштовхує заряд q_2 з точки А (3; 0) у точку В (5; 0). Визначити роботу, яку виконує сила відштовхування.

б) Котел має форму півсфери радіусу $R = 1м$. Він наповнений рідиною із густиною $\rho = 0{,}875\ \frac{г}{см^3}$. Обчислити роботу, яку потрібно виконати, щоб викачати повністю всю рідину з котла.

в) Знайти момент інерції і статичний момент прямокутника із сторонами $a = 5\ м$ і $b = 6\ м$ відносно осей симетрії цього прямокутника.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп’ютерної математики MahtCad.

Варіант №11

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}dx$ б) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$ в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$

г) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$ д) $\int\limits_1^2 x\ln x dx$ е) $\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin x dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y^2 = 2px,\ x^2 = 2py;$ б) $\begin{cases} x = 13(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 13(2\sin t - \sin 2t); \end{cases}$ в) $\rho^2 = 2\cos 2\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y = \ln x,$ $0 \le x \le \sqrt{3}.$ б) $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t; \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ в) $\rho = \frac{a}{\varphi},$ $\varphi_0 \le \varphi \le 2\pi$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y = 2x - x^2,$ $y = -x + 2,\ \ x = 0$ б) $y = \arcsin x,$ $y = \arccos x,\ \ y = 0$ в) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1,\ z = y\sqrt{3},$ $z = 0\ \ (y \ge 0)$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y^2 = 4 + x;\ \ x = 2$ б) астроїди $\begin{cases} x = 9\cos^3 t, \\ y = 9\sin^3 t; \end{cases}$ в) кола: $\rho = 3\cos\varphi$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt[4]{\left(16+x^2\right)^5}}$ б) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln 2dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$ в) $\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int_0^1\frac{x^{11}}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Струм конденсатора $I=20\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$. Визначити його заряд q при $t=0{,}005\ с$, якщо $q=\int_0^t Idt$ та $\omega=100\pi\ \ с^{-1}$.

б) Яку роботу треба виконати, щоб насипати купу піску у формі півсфери радіусу $R=1{,}2\ м$, якщо питома густина піску – $\rho=1300\ \frac{кг}{м^3}$.

в) Знайти середнє значення функції $y=tgx$ на відрізку $\left[0;\ \frac{\pi}{6}\right]$.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп’ютерної математики MahtCad.

Варіант №12

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + 5x}{1+x^2} dx$ б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\left(16+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ в) $\int\limits_{2arctg\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\left(1-\cos x\right)^3}$

г) $\int\limits_1^2 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$ д) $\int\limits_0^1 (x+1)\ln(x+1)dx$ е) $\int\limits_0^{\pi} (4-16x)\sin 4x dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $x^2+y^2+6x-2y+8=0,$ $y=x^2+6x+10;$ б) $\begin{cases} x=8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x \geq 4;$ в) $\rho=\sin^2\frac{\theta}{2},\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=e^x,$ $0\leq x\leq 1$ б) $\begin{cases} x=4\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t; \end{cases}$ в) $\rho=2a\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi},$ $\varphi_1\leq\varphi\leq\varphi_2$

4. Знайти об'єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Ox, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Oy, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y=2x-x^2,$ $y=-x+2$ б) $y=x^2-2x+1,$ $x=2,\ y=0$ в) $z=2x^2+8y^2,$ $z=4$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі Ox; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі Ox; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\cdot ch\frac{x}{a}$ б) кола $\begin{cases} x=7\cos t, \\ y=7\sin t; \end{cases}$ в) кардіоїди: $\rho=10(1+\sin\varphi)$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{0}^{\infty} x\sin x dx$ б) $\int\limits_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$ в) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{2x^6+3x^2+5}}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^3 dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{1+x^5}{1+x^{10}} dx \ .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\, м/с$.

а) Знайти координати центру ваги параболічного сегменту, обмеженого лініями $y = 4 - x^2,\ \ y = 0$.

б) Резервуар має форму правильної трикутної піраміди, оберненої вершиною вниз. Висота піраміди $H = 3м$, сторона основи піраміди $a = 1м$. Резервуар наповнений рідиною, густина якої складає – $\rho = 0{,}65\, \frac{г}{см^3}$. Обчислити роботу, яку потрібно витратити, щоб викачати рідину з резервуару повністю.

в) Використовуючи визначений інтеграл, обчислити границю суми:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right).$$

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп’ютерної математики MahtCad.

Варіант №13

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x-(\mathrm{arctg}\, x)^4}{1+x^2}dx$ б) $\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$ в) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2arctg2} \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$

г) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}dx$ д) $\int_0^2 (x+1)^2\ln(x+1)dx$ е) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $x=4; y=3x^2-6x,$ $y=0,\ 0\le x\le 4;$ б) $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y\ge 4.$ в) $\rho = a\sin 3\theta.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=\frac{x^2}{2p},$ $0\le x\le \sqrt{2p}$ б) $\begin{cases} x=\sqrt{2}\sin t, \\ y=\sqrt{2}\cos t; \end{cases}$ в) $\rho = 1+\cos\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Ox, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Oy, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y=e^{1-x},\ y=0,$ $x=0,\ \ x=1$ б) $y=x^3,\ y=x$ в) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{25}-z^2=1,$ $z=0,\ z=2$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі Ox; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі Ox; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $8y^2=x^2-x^4$ б) трактриси $\begin{cases} x=a\cdot\left(\cos t+\ln\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right), \\ y=a\cdot\sin t; \end{cases}$ в) кола: $\rho=5\cos\varphi$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{4}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}dx$ в) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{\ln x^2}^{4^x}\frac{dt}{\sqrt{t^2-5t+9}}$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt[5]{x^2+2}}dx .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)=2t+k\ \left(\frac{м}{с}\right)$. Знайти значення параметра k, якщо відомо, що за проміжок часу від $t_1=0$ до $t_2=2$ $(с)$ тіло пройшло шлях завдовжки $40\ м$.

б) Знайти роботу по подоланню сили тяжіння, яку треба було виконати, щоб побудувати правильну трикутну піраміду заввишки $H=20\ м$ і ребром основи $a=40\ м$. Якщо питома густина будівельного каменю – $\rho=2500\ \frac{кг}{м^3}$.

в) Знайти координати центру ваги однорідної дуги кола $x^2+y^2=4$, розташованої в третій координатній чверті.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп’ютерної математики MahtCad.

Варіант №14

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$ б) $\int_0^7 x^2\sqrt{49-x^2}\,dx$ в) $\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} \frac{\cos^2 x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$

г) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$ д) $\int_1^e \sqrt{x}\ln x dx$ е) $\int_0^\pi x\sin x\cos x dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=2x^2+3x-9,$ $y=0;$ б) $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases} x\ge 2.$ в) $\rho=2\cos\theta,\ \rho\ge 1.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y^2=x^3,$ $0\le x\le 4$ б) $\begin{cases} x=7\cos t(1-\cos t), \\ y=7\sin t(1-\cos t); \end{cases}$ в) $\rho=e^{7\varphi},\ 0\le\varphi\le\pi$

4. Знайти об'єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y=x^2,$ $y^2-x=0$ б) $y=\arccos x,$ $y=\arcsin x,\ x=0$ в) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=-1,$ $z=12$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $x^2+(y-b)^2=r^2$ $(0<r<b)$ б) кола $\begin{cases} x=5cost, \\ y=5sint; \end{cases}$ в) лемніскати Бернуллі: $\rho=6\sqrt{2\cos 2\varphi}$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{7dx}{\left(x^2-4x\right)\ln 5}$ б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}\ln 2}$ в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} ctgxdx$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dt}\int\limits_{1}^{t^2+1} \frac{\sin x}{x}dx$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\, м/с$.

а) Однаково заряджені частинки, електричний заряд яких відповідно становить: $q_1 = 4\cdot 10^{-9}\, Кл$ та $q_2 = 5\cdot 10^{-8}\, Кл$ знаходяться в олії на відстані $20\, см$ одна від одної. Яку роботу виконує сила відштовхування, якщо у результаті спостереження частинки віддалились на відстань $0{,}8\, м$? Урахувати що, діелектрична проникність олії – $\varepsilon_{олії} = 2{,}5$.

б) Пластина, що має форму половини еліпса з півосями $a = 1{,}5 м$ і $b = 0{,}7\, м$, вертикально занурена в рідину щільності $\rho = 0{,}75\, \frac{г}{см^3}$ таким чином, що велика вісь еліпса лежить на поверхні. Знайти величину тиску рідини на кожну із сторін пластини.

в) Знайти масу стрижня довжиною $l = 100\, м$, якщо його лінійна густина змінюється за законом $\rho = 0{,}75x + 1 \left(\frac{кг}{м^3}\right)$, де x – відстань від одного із кінців стрижня.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №15

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int\limits_0^{\frac{5}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{25-x^2}}$ в) $\int\limits_0^{2arctg\frac{1}{2}} \frac{(1-\sin x)dx}{\cos x(1+\cos x)}$

г) $\int\limits_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$ д) $\int\limits_1^2 x^2\ln x dx$ е) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xtgx}{\cos^2 x}dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=x^2+6x+5,$ $y=0;$ б) $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le x\le 8\pi,\ y\ge 6.$ в) $\rho=a\varphi,$ $\rho=a\cos\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y^2=px,$ $0\le x\le 1$ б) $\begin{cases} x=e^t\sin t, \\ y=e^t\cos t; \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ в) $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Ox, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Oy, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $x^2+(y-2)^2=1$ б) $y^2=16-x,\ \ x=0$ в) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1,$ $z=3,\ \ z=0$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі Ox; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі Ox; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y=\frac{x^3}{3},$ $x=-2,\ x=2$ б) *однієї арки циклоїди* $\begin{cases} x=7(t-\sin t), \\ y=7(1-\cos t); \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ в) кардіоїди: $\rho=10(1+\cos\varphi)$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi\left(x^2+4x+5\right)}$ б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{1-x^4}$ в) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}dx$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{0} \sqrt{1+t^2}\,dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}dx .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Точка починає рухатися від точки $A(3;4)$ зі швидкістю, яка дорівнює абсцисі. У якій точці вона опиниться через $5\ с$ після початку руху?

б) Резервуар має форму правильної піраміди з квадратною основою, оберненою вершиною вниз. Висота піраміди $H=3\ м$, сторона основи $a=2\ м$. Резервуар наповнений рідиною, густина якої становить $\rho=0{,}555\ \frac{г}{см^3}$. Обчислити роботу, яку потрібно виконати, щоб викачати рідину з резервуару.

в) Знайти полярний момент інерції круга діаметром $d=5$ см, тобто момент інерції відносно осі, що проходить через центр круга перпендикулярно до його площини.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №16

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$ б) $\int\limits_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}dx$ в) $\int\limits_0^{2arctg\frac{1}{3}} \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$

г) $\int\limits_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ д) $\int\limits_{-2}^0 \left(x^2+2x\right)e^{3x}dx$ е) $\int\limits_1^8 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,$ $y = 0;$ б) $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y \ge 2\sqrt{3};$ в) $\rho = a(1-\cos\varphi),$ $0 \le \varphi \le \pi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1},$ $a \le x \le b$ б) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - \frac{1}{3}t^3; \end{cases}$ $0 \le t \le \sqrt{3}$ в) $\rho = \frac{a}{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)},$ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

4. Знайти об'єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y = 1 - x^2,\ x = 0,$ $x = \sqrt{y-2},\ x = 1$ б) $y = x^3,\ x = 0,$ $y = 8$ в) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} = 1,\ z = y\sqrt{3},$ $z = 0\ \ (y \ge 0)$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y = \sin x,$ $0 \le x \le \pi$ б) $\begin{cases} x = 4(\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t); \end{cases}$ в) лемніскати Бернуллі: $\rho^2 = 32\cos 2\varphi$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{\pi dx}{\left(1+9x^2\right)\operatorname{arctg}^2 3x}$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$ в) $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{\sqrt{x}} \cos^2 t\,dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{-6}^{8} \sqrt{100-x^2}\,dx \ .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\, м/с$.

а) Сталева куля радіусу $r=0{,}2$ м занурена у воду на глибину $h=1$ м. Яку роботу необхідно виконати, щоб витягнути кулю з води, якщо значення питомої ваги води і сталі, з якої виготовлено кулю відповідно складають $\gamma_{води}=9810\frac{Н}{м^3}$ і $\gamma_{сталі}=77000\ \frac{Н}{м^3}$?

б) Резервуар має форму півсфери. Через який час рідина, що наповнює резервуар, витече з нього через маленький отвір у вершині, якщо радіус сфери $R=25\, см$, площа отвору $S_0=1\, см^2$, а коефіцієнт швидкості витікання σ, який залежить від в’язкості рідини становить – $\sigma=0{,}6$.

в) Знайти статичні моменти прямокутника зі сторонами $a=6\, м$ і $b=10\, м$ відносно його сторін.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп’ютерної математики MahtCad.

Варіант №17

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ б) $\int\limits_{0}^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(64-x^2\right)^3}}$ в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos x}$

г) $\int\limits_{1}^{e} \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}dx$ д) $\int\limits_{1}^{2}\left(-2x^2-5x\right)e^{-2x}dx$ е) $\int\limits_{0}^{1}(x+1)\cdot\ln^2(x+1)dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=(x+2)^2,\quad y=4-x.$ б) $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases}$ $y\ge 6,\ 0\le x\le 2\pi;$ в) $\rho=a\sin\varphi,\quad \rho=2a\sin\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=\ln\sin x,\quad \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{3}$ б) $\begin{cases} x=\frac{c^2}{b}\cos^3 t, \\ y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t; \end{cases}$ в) $\rho=\frac{a}{\cos^2\frac{\varphi}{2}},\quad 0\le\varphi\le\varphi_0$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Ox, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Oy, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y=x^2,\ \ y=1,\quad x=2$ б) $y^2=4-x,\ \ x=0$ в) $z=x^2+5y^2,\quad z=5$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі Ox; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі Ox; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $x^2=4ay,\quad -2\sqrt{3a}\le x\le 2\sqrt{3a}$ б) $\begin{cases} x=\cos t-\cos 2t, \\ y=2\sin t-\sin 2t; \end{cases}$ в) кола: $\rho=17\sin\varphi$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4x+5}$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}dx$ в) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{\sin x} \frac{\arcsin t}{t}dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)=16t-t^2\ \left(\frac{м}{с}\right)$. Знайти довжину шляху, який подолано тілом від початку шляху, до його зупинки.

Вказівка: в моменти початку руху і зупинки швидкість тіла дорівнює нулю.

б) Повний рідини резервуар має форму правильної трикутної піраміди, оберненої вершиною вниз. Через який час рідина, що наповнює резервуар, витече вся з нього через маленький отвір у вершині, якщо висота піраміди $H=500\ см$, сторона основи піраміди $a=200\ см$, площа отвору – $S_{отв}=0{,}05\ см^2$, а коефіцієнт швидкості витікання σ, який залежить від в’язкості рідини становить – $\sigma=0{,}85$?

в) Використовуючи визначений інтеграл, обчислити границю суми:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}.$$

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп’ютерної математики MahtCad.

Варіант №18

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$ б) $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx$ в) $\int_0^{2arctg\frac{3}{2}} \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$

г) $\int_0^1 \frac{arctgx+x^3}{1+x^2}dx$ д) $\int_0^{\pi} \cos^8 x\, dx$ е) $\int_0^e \left(3x^2-2x+200\right)e^{4x}dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $xy=a^2,\ x=1,$ $x=5,\ y=0;$ б) $\begin{cases} x=32\cos^3 t, \\ y=3\sin^3 t, \end{cases}$ $x\ge 12\sqrt{3};$ в) $\rho=a\cos\varphi,$ $\rho=2a\cos\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=\sqrt{e^{2x}-1}-$ $-\mathrm{arctg}\sqrt{e^{2x}-1},$ $0\le x\le 1$ б) $\begin{cases} x=\left(t^2-2\right)\sin t-2t\cos t, \\ y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t; \end{cases}$ $0\le t\le \pi$ в) $\rho=a\cos^4\frac{\pi}{4}$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Ox, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Oy, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y=\arccos\left(\frac{x}{3}\right),$ $y=\arccos x,\ y=0$ б) $y=x^2,\ \ y=4$ в) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1,$ $z=0,\ \ z=4$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі Ox; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі Ox; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y=\cos\frac{\pi\cdot x}{2a},$ $-a\le x\le a$ б) трактриси $\begin{cases} x=2\cdot\left(\cos t+\ln\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right), \\ y=2\cdot\sin t; \end{cases}$ в) кардіоїди: $\rho=10\left(1-\cos\varphi\right)$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{\left(4+x^2\right)\sqrt{\pi arctg\frac{x}{2}}}$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}$ в) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x^2} e^{\sqrt{t}}\,dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin 2x-x\right)dx\ .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Швидкість тіла задається формулою: $v=\frac{t}{e^{2t}}\left(\frac{м}{с}\right)$. Знайти шлях, який пройшло тіло за 20 с від початку руху.

б) Пластина у формі рівнобедреного трикутника з основою $2a\ \left(a=8\ м\right)$ і заввишки $H=5\ м$ занурена вертикально в рідину із густиною $\rho=0{,}50\ \frac{г}{см^3}$ таким чином, що основа трикутника лежить на поверхні. Знайти величину тиску рідини на пластину.

в) Знайти статичні моменти відносно осей *Ox* та *Oy* і координати центра ваги трикутника, який обмежений прямими: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1;\ \ x=0;\ \ y=0$.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №19

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ б) $\int_{0}^{2\sqrt{2}} \frac{x^4dx}{\left(16-x^2\right)\sqrt{16-x^2}}$ в) $\int_{2arctg2}^{2arctg3} \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$

г) $\int_{3}^{5} \sqrt{\frac{2-x}{x-5}}dx$ д) $\int_{-1}^{0} \left(x^2+2\right)e^{-3x}dx$ е) $\int_{2}^{3} \left(x+1\right)^2 \ln^2\left(x+1\right)dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $xy=3,\ x+y=4;$ б) $\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=2\sin t, \end{cases}$ $y\geq\sqrt{3};$ в) $\rho=a,$ $\rho=a\sin\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=\ln cth\left(\frac{x}{2}\right),$ $a\leq x\leq b$ б) $\begin{cases} x=e^t\left(\cos t+\sin t\right), \\ y=e^t\left(\cos t-\sin t\right); \end{cases}$ $0\leq t\leq\pi$ в) $\rho=\frac{1}{1+\cos\varphi},$ $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$

4. Знайти об'єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right),$ $y=x^2$ б) $y=x^2-2x+1,$ $y=0,\ \ x-2=0$ в) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=-1,$ $z=20$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Oy*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y,$ $1\leq y\leq e$ б) кола: $\begin{cases} x=2cost, \\ y=2sint; \end{cases}$ в) кардіоїди: $\rho=10\left(1+\sin\varphi\right)$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_0^\infty \frac{\text{arctg}2x}{\pi\left(1+4x^2\right)}dx$ б) $\int\limits_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$ в) $\int\limits_0^1 \ln xdx$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{\sin x}^{0} \sqrt{\text{tg}\,t}\,dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_1^9 \left(x-4\sqrt{x}+5\right)dx \ .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Знайти шлях, який подолає матеріальна точка за третю секунду, знаючи, що швидкість її прямолінійного руху змінюється за законом: $v(t)=3t^2-2t-3\ \left(\frac{м}{с}\right)$.

б) Пластина у вигляді круга, радіус якого – $R=50\ см$, наполовину занурена вертикально в рідину, густина якої – $\rho=0{,}975\ \frac{г}{см^3}$. Знайти величину тиску рідини на кожну із сторін пластини.

в) Знайти масу абсолютно тонкої пластини, обмеженої лініями: $y=\frac{3}{x},\ y=4-x$, якщо густина матеріалу, з якого виготовлено пластину, в кожній її точці дорівнює квадрату абсциси цієї точки.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп’ютерної математики MahtCad.

Варіант №20

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$ б) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3-\sin x}$ в) $\int_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$

г) $\int_1^3 \frac{x^2}{1+x^6}dx$ д) $\int_{-1}^{2}\left(6x-x^2\right)\sin 6x dx$ е) $\int_1^2\left(-2x^2-5x\right)e^{-2x}dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=\frac{7}{2}\left(e^{\frac{x}{7}}+e^{-\frac{x}{7}}\right)$, $x=7,\ y=0;$ б) $\begin{cases} x=2+2\cos t, \\ y=2+2\sin t; \end{cases}$ в) $\rho=a,$ $\rho=a\cos\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $9y^2=4(3-x)^3,$ $0\le x\le 3$ б) $\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t), \\ y=a(2\sin t-\sin 2t); \end{cases}$ в) $\rho=a\cos^3\frac{\varphi}{3}$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y=x^2,\ \ x=2,$ $y=1$ б) $y=x^2+1,\ \ y=x,$ $x=0,\ \ x=1$ в) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{64}=1,$ $z=4,\ \ z=0$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y=\operatorname{tg}x,$ $0\le x\le a<\frac{\pi}{2}$

б) *однієї арки циклоїди* $\begin{cases} x=11(t-\sin t), \\ y=11(1-\cos t); \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$

в) лемніскати Бернуллі: $\rho=15\sqrt{2\cos 2\varphi}$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+2x\right)\ln 333}$ б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{\sqrt[3]{9x}\,dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$ в) $\int\limits_{-3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{0}^{\ln x} \sqrt{e^t-1}\,dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\, м/с$.

а) Яку роботу треба витратити, щоб розтягнути пружину на 25 см, якщо сила в 1 Н розтягує її на 5 см?

б) Пластина завтовшки $d=0{,}5\,см$, що має форму прямого параболічного сегменту з основою $2a\left(a=2\,м\right)$ і заввишки $H=5м$, обертається навколо дотичної до параболи в її вершині з постійною кутовою швидкістю $\omega=5\pi\, c^{-1}$. Густина матеріалу пластини – $\rho=2{,}2\,\frac{г}{см^3}$. Знайти кінетичну енергію пластини.

в) Знайти координати центру ваги плоскої фігури, обмеженої лініями: $x=\frac{\pi}{3},\ x=\frac{\pi}{2},\ y=0,\ y=\cos x$.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп’ютерної математики MahtCad.

Варіант №21

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx$ б) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$ в) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$

г) $\int\limits_1^{64} \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)}dx$ д) $\int\limits_0^1 \arccos x dx$ е) $\int\limits_0^e \left(3x^2-2x\right)e^{4x}dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=\frac{8}{4+x^2},\ y=\frac{x^2}{4};$ б) $\begin{cases} x=2\left(t-\sin t\right), \\ y=2\left(1-\cos t\right), \end{cases}$ $y\ge 2,\ 0\le x\le 4\pi;$ в) $\rho=\frac{1}{2}+\cos\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $2y=x^2-2,$ $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$ б) $\begin{cases} x=a\left(\cos t+t\sin t\right), \\ y=a\left(\sin t-t\cos t\right); \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ в) $\rho=\theta^2,$ $0\le\theta\le\pi$

4. Знайти об'єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Ox, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Oy, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $xy=4,\ \ x=1,$ $x=4,\ \ y=0$ б) $2y=16-x^2,$ $y-4=0,\ \ y=0$ в) $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{25}=1,\ z=\frac{y}{\sqrt{3}},$ $z=0\ \ \left(y\ge 0\right)$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі Ox; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі Ox; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y=\frac{1}{x},\ 1\le x\le a$ б) $\begin{cases} x=8\left(\cos t-\cos 2t\right), \\ y=8\left(2\sin t-\sin 2t\right); \end{cases}$ в) кардіоїди: $\rho=5\left(1-\cos\varphi\right)$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{16\,dx}{\pi\left(4x^2+4x+5\right)}$ б) $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$ в) $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^3}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}}\ln t\,dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{-1}^{2}\left(3-x-\frac{4}{(x+2)^2}\right)dx.$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\,м/с$.

а) Два тіла почали рухатися по прямій в один і той же момент з однієї точки в однаковому напрямі. Перше тіло рухалося зі швидкістю, що описується рівнянням: $v_1(t)=3t^2+2t\ \left(\frac{м}{с}\right)$, інше зі швидкістю згідно рівняння: $v_2(t)=2t\ \left(\frac{м}{с}\right)$. Визначити відстань між тілами через 2 секунди після початку руху.

б) Резервуар має форму правильної чотирикутної піраміди, оберненої вершиною вниз. Через який час рідина, що наповнює резервуар, витече з нього через маленький отвір у вершині, якщо висота піраміди $H=50\,см$, сторона основи піраміди $a=20\,см$, площа отвору $S_0=0{,}2\,см^2$?, а коефіцієнт швидкості витікання σ, який залежить від в'язкості рідини становить – $\sigma=0{,}95$.

в) Знайти середнє значення функції $y=\ln x$ на відрізку $[1;\ 2e]$.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №22

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int_{0}^{1}\frac{x^3dx}{\left(x^2+1\right)^2}$ б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin x\,dx}{\left(1+\cos x-\sin x\right)^2}$ в) $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}$

г) $\int_{9}^{15}\sqrt{\frac{6-x}{x-18}}\,dx$ д) $\int_{0}^{1}\arcsin x dx$ е) $\int_{0}^{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=x+1,\ y=\cos x,$ $y=0;$ б) $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\cos^3 t,\\ y=\sqrt{2}\sin^3 t,\end{cases}$ $x\ge 1;$ в) $\rho=\cos\varphi-\sin\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=\frac{2}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{2}{3}x\sqrt[4]{x^3},$ $y=0$ б) $\begin{cases}x=8\sin^2 t,\\ y=8\sin^2 t\operatorname{tg}t;\end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{4}$ в) $\rho=a\sin\varphi$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Ox, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Oy, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $\left(y-3\right)^2+3x=0,$ $x=-3$ б) $y=4x+x^2+4,$ $y=2$ в) $z=4x^2+9y^2,$ $z=6$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі Ox; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі Ox; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y=e^{-x},$ $0\le x\le\infty$ б) $\begin{cases}x=\frac{t^3}{3},\\ y=4-\frac{t^2}{2};\end{cases}$ між точками перетину з осями координат в) лемніскати Бернуллі: $\rho^2=18\cos 2\varphi$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_0^{\infty} e^{-3x} x dx$ б) $\int\limits_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ в) $\int\limits_{-3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx} \int\limits_{tg^2 x}^{1} arctg\sqrt{t}\, dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{-2}^{4} \sqrt[3]{2x^2(x-6)}\, dx.$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\, м/с$.

а) Знайти масу неоднорідної дуги кривої $r = 1+\cos\varphi$, якщо густина матеріалу залежить від змінної φ наступним чином: $\rho(\varphi) = \sin^2\frac{\varphi}{2}$.

б) Пластина завтовшки $d = 0{,}5\, см$, що має форму рівнобічної трапеції з основами $2a = 1{,}8 м,\ 2b = 1{,}2 м$ і висотою $H = 0{,}7\ м$, обертається навколо своєї більшої основи з постійною кутовою швидкістю $\omega = 5\pi\ c^{-1}$. Густина матеріалу пластини – $\rho = 2{,}5\ \frac{г}{см^3}$. Знайти кінетичну енергію пластини.

в) Використовуючи визначений інтеграл, обчислити границю суми:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+...+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right).$$

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №23

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \ln\cos x\, dx$ б) $\int\limits_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(8-x^2\right)^3}}$ в) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+3\sin x+2\cos x}$

г) $\int\limits_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1} dx$ д) $\int\limits_0^3 arctg\sqrt{x} dx$ е) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^0 \left(3x-x^2\right)\sin 2x dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y^2 = x^3 - x^2,\ x=2;$ б) $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$ $x \ge 6\sqrt{3};$ в) $\rho = 3\sin\varphi,$ $\rho = 5\sin\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y = 1-\ln\cos x,$ $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ б) $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t; \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ в) $\rho = a\cos^3\frac{\varphi}{3},$ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Ox, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Oy, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y = 2\sin x,$ $0 \le x \le \pi$ б) $y = 2x - x^2,$ $y = 0$ в) $z=1,\ \ z=0,$ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі Ox; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі Ox; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y = ax^2,$ $0 \le x \le b$ б) Трактриси: $\begin{cases} x = 6\cdot\left(\cos t + \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right), \\ y = 6\cdot\sin t; \end{cases}$ в) лемніскати Бернуллі: $\rho = 8\sqrt{2\cos 2\varphi}$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{4x^2+4x+5}$ б) $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$ в) $\int\limits_0^{+\infty}4^{1-\frac{x}{2}}dx$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{\ln x}^{2}\sin e^t\,dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_0^3\frac{10x}{1+x^2}\,dx.$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Знайти роботу, яку треба витратити, щоб розтягнути пружину на $0{,}05м$, якщо сила $100H$ розтягує пружину на $0{,}01\ м$.

б) Пластина, що має форму рівнобічної трапеції з основами $2a=1{,}8м,\ 2b=1{,}2м$ і висотою $H=0{,}7\ м$) занурена вертикально в рідину щільності $\rho=0{,}8\ \frac{г}{см^3}$ так, що більша основа лежить на поверхні. Знайти величину сили тиску рідини на кожну із сторін пластини.

в) Знайти ординату центра ваги дуги однорідної кривої: $\rho=\frac{5}{\cos\varphi}$, якщо $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №24

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$ б) $\int\limits_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$ в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$

г) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$ д) $\int\limits_{0}^{1} xarctgxdx$ е) $\int\limits_{-2}^{0} \left(x^2+5x+6\right)\cdot e^{3x}dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=4x^2,\ y=\frac{x^2}{9},$ $y=2;$ б) $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \end{cases}$ $y\ge 3,\ 0\le t\le 6\pi;$ в) $\rho=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right).$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=\operatorname{ch}x,$ $0\le x\le 1$ б) $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3-t, \\ y=t^2+2; \end{cases}$ $0\le t\le 3$ в) $\rho=\frac{1}{\varphi},$ $\frac{1}{2}\le\varphi\le 2$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y^2=6x,\ x=3,$ $x=5$ б) $y=x(4-x),$ $y=0$ в) $z=2,\ \ z=0,$ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y=\sin 2x,$ $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ б) астроїди $\begin{cases} x=10\cos^3 t, \\ y=10\sin^3 t; \end{cases}$ в) кардіоїди: $\rho=8(1+\sin\varphi)$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{-\infty}^{0}\left(\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$ б) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$ в) $\int\limits_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x^2+4x+5}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{x^3}^{x}\cos\sqrt[3]{t}\,dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\cdot dx .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Швидкість матеріальної точки змінюється за законом: $v=6t^3+t$. Знайти шлях, що пройшла точка за 10 с від початку руху. Чому дорівнює середня швидкість за цей проміжок часу?

б) Пластина завтовшки $d=0{,}2\ см$, що має форму прямокутного трикутника з катетами $a=12\ м, b=3\ м$, обертається навколо середньої лінії трикутника, паралельної катету b, з постійною кутовою швидкістю $\omega=5\pi\ c^{-1}$. Густина матеріалу, з якого виготовлено пластину – $\rho=2{,}75\ \frac{г}{см^3}$. Знайти кінетичну енергію пластини.

в) Знайти абсцису центра ваги дуги однорідної кривої: $\rho=\frac{50}{\sin\varphi}$, якщо $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №25

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$ в) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{2arctg2} \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$

г) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$ д) $\int\limits_{-1}^0 \arccos x dx$ е) $\int\limits_{-2}^0 \left(x^2-4\right)\cos 3x dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=(x-4)^2,$ $y=16-x^2, y=0;$ б) $\begin{cases} x = 4\cos t + 5\sin t, \\ y = 5\cos t - 4\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 6\pi;$ в) $\rho = \sin\varphi,$ $\rho = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right),$ $0 \le \varphi \le \frac{3}{4}\pi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $x = \ln\cos y,$ $0 \le y \le \frac{\pi}{3}$ б) $\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t, \\ y = 6\sin t - 8\cos t; \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ в) $\rho = 4(1-\sin\varphi),$ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$

4. Знайти об'єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $3x-4y=0,$ $3x-y=0,\ y=3$ б) $y^2=4-x,$ $x=0$ в) $x^2+\frac{y^2}{4}-z^2=1,$ $z=0,\ z=3$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

однієї арки циклоїди

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ б) $\begin{cases} x=25(t-\sin t), \\ y=25(1-\cos t); \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ в) кардіоїди: $\rho=4(1-\sin\varphi)$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{2x^2-2x+1}$ б) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$ в) $\int\limits_0^{\infty}\sin x dx$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_x^{\ln^2 x}e^{\sqrt{t}}\,dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_2^4\left(2x^2+\frac{108}{x}-59\right)dx.$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Знайти шлях, який подолає матеріальна точка за 4 секунди від початку руху, якщо швидкість цієї точки $v(t)=3t^3-15t^2+100\ \left(\frac{м}{с}\right)$.

б) На відстані x знаходиться два тіла масами m_1 і m_2 , які взаємодіють між собою із силою $F=G\frac{m_1m_2}{x^2}$. Визначити роботу, яку виконає сила F при переміщенні тіла m_2 у нескінченність з положення $x=a$.

в) Знайти координати центру ваги параболічного сегменту, обмеженого лініями: $y=12-x^2$, $y=3$.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №26

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int_{1}^{2} \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}}dx$ б) $\int_{0}^{9} \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}dx$ в) $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$

г) $\int_{1}^{64} \frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}-7x-6\sqrt[4]{x^3}}dx$ д) $\int_{2}^{4}\left(2-3x^2\right)\cos 3x dx$ е) $\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x+1\right)\sin 3x dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=\cos x\sin^2 x,\ y=0,$ $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right);$ б) $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=6\sin t, \end{cases}$ $y=3\ (y\ge 3);$ в) $r=2\cos\varphi,\ r=4.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y,$ $1\le y\le 2$ б) $\begin{cases} x=9(t-\sin t), \\ y=9(1-\cos t); \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ в) $\rho=6(1+\sin\varphi),$ $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0$

4. Знайти об'єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $2y=x^2,$ $y+2x-3=0$ б) $3y=6x+x^2+9,$ $y=3$ в) $\frac{x^2}{27}+y^2=1,\ z=\frac{y}{\sqrt{3}},$ $z=0\ \ (y\ge 0)$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y^2=2x$ між точками перетину з прямою $2x=3$ б) $\begin{cases} x=13(\cos t-\cos 2t), \\ y=13(2\sin t-\sin 2t); \end{cases}$ в) $\rho=\sqrt{2};$ $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{2\pi}{3}$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$ б) $\int\limits_{1}^{5} \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$ в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{\cos x}^{x} \arccos t\, dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(1+\sin^2 x\right) dx.$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\, м/с$.

а) Визначити масу стрижня довжиною 2 м, якщо його лінійна густина змінюється за законом $g = 6x + 0{,}3x^2$ кг/м, де x – відстань від одного з кінців стрижня.

б) Обчислити роботу струму за час від $t_1 = 0$ (с) до $t_2 = 1$ (с), якщо сила струму підпорядковується формулі: $I = I_0 \sin \omega t$, де $I_0 = 1$ mA – максимальне значення струму; $\omega = 50$ – циклічна частота; t – час.

в) Знайти середнє значення функції $y = x(100 - x)$ на відрізку $[0;\ 5]$.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №27

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_{-\frac{5}{3}}^{1} \frac{\sqrt[3]{3x+5}+2}{1+\sqrt[3]{3x+5}}dx$ б) $\int\limits_{2}^{3} \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}}dx$ в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x(1+\cos x)}dx$

г) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{x^2+3x+2}dx$ д) $\int\limits_{0}^{1} \left(x^2+6\right)\sin 2x dx$ е) $\int\limits_{0}^{1} \arcsin^2 x dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $y=0$, $x=1$, $x=e^3$; б) $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$ $x=6\sqrt{3}$ $\left(x\ge 6\sqrt{3}\right)$; в) $r=2(1-\cos\varphi)$, $r=2$.

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ б) $\begin{cases} x=\sqrt{3}t^2, \\ y=t-t^3; \end{cases}$ $-1\le t\le 1$ в) $\rho=2e^{\frac{4}{3}\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=1$ б) $y=x^2+1$, $y=2x$, $x=0$ в) $z=2x^2+18y^2$, $z=6$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $x^2+y^2=4$, $-1\le x\le 1$ б) $\begin{cases} x=2(\cos t-\cos 2t), \\ y=2(2\sin t-\sin 2t); \end{cases}$ в) першої арки циклоїди: $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t; \end{cases}$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$ б) $\int\limits_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$ в) $\int\limits_{-\infty}^{0}\cos^2 x dx$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{e^{x^2}}^{x}\ln t\,dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(8x+\frac{4}{x^2}-15\right)dx .$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Швидкість матеріальної точки змінюється за законом $v=2(16-t)$, де v вимірюється в $\frac{м}{с}$. Яке відбудеться найбільше віддалення означеної точки від початку руху?

б) Прямокутний резервуар наповнений водою і олією в рівних за обсягом частинах, при цьому олія вдвічі легше за воду. Показати, що сила тиску суміші на бічну стінку зменшиться на одну п'яту, якщо воду повністю замінити олією.

в) Використовуючи визначений інтеграл, обчислити границю суми:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ ...\ +\frac{1}{(2n)^2}\right].$$

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №28

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int_{3}^{12}\sqrt{\dfrac{6-x}{x-14}}\,dx$ б) $\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{10}{3}}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)^2\cdot(x-2)^2}\,dx$ в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{2+\sin x}\,dx$

г) $\int_{0}^{2}\dfrac{x}{1+x+x^2}\,dx$ д) $\int_{1}^{3}\left(2-x^2\right)e^{4x}dx$ е) $\int_{1}^{e}x^2\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=(x+1)^2,\quad y^2=x+1;$ б) $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t,\end{cases}$ $y=1\ \left(0<x<2\pi,\ \ y\geq 1\right);$ в) $r=1,\ r=1-\sin\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2},\quad 1\leq x\leq 2$ б) $\begin{cases}x=\dfrac{t^6}{6},\ \ x=0,\\ y=2-\dfrac{t^4}{4},\ \ y=0;\end{cases}$ в) $\rho=2\varphi,\quad 0\leq\varphi\leq\dfrac{5}{12}$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Ox, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі Oy, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y=x,\ y=2x,\quad x=2$ б) $2y=4x+x^2+3,\quad y=0$ в) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}-z^2=1,\quad z=0,\ \ z=2$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі Ox; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі Ox; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y=\cos x,\quad 0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ б) трактриси $\begin{cases}x=10\cdot\left(\cos t+\ln tg\,\dfrac{t}{2}\right),\\ y=10\cdot\sin t;\end{cases}$ в) $\rho=\sqrt{8};\quad \dfrac{\pi}{3}\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2}$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{\left(6x^2-5x+1\right)\ln\frac{3}{4}}$ б) $\int\limits_0^{4}\frac{10xdx}{\sqrt[4]{\left(16-x^2\right)^3}}$ в) $\int\limits_0^{\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{\mathrm{tg}\,x}^{x}\frac{\mathrm{arctg}\,t}{t}dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}x^2e^{-x^2}\,dx\,.$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\;м/с$.

а) Обчислити роботу електричного струму за час від $t_1=0$ до $t_2=5$ с, якщо сила струму $\mathrm{I}=\mathrm{I}_m\sin\omega\cdot t$, де $I_m=10\;A$ – максимальне значення сили струму на частоті 50 Гц; ω – циклічна частота; t – час.

б) Знайти, на якій глибині $x=c$ треба розділити шлюз горизонтальною прямою, якщо шлюз має форму прямокутника завширшки – 18 м, а висоту – 6 м, таким чином, щоб сила тиску води на верхню і нижню частини шлюзу була однаковою.

в) Знайти координати центра ваги абсолютно тонкої плоскої фігури, обмеженої лініями: $y^2=3x$, $x^2=3y$.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп’ютерної математики MahtCad.

Варіант №29

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_{\frac{1}{24}}^{\frac{1}{3}} \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2 \cdot \sqrt{x}}dx$ б) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}dx$ в) $\int\limits_{2}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$

г) $\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} \frac{x^4}{\left(16-x^2\right)\cdot\sqrt{16-x^2}}dx$ д) $\int\limits_{4}^{5} (x-3)\ln(x-3)dx$ е) $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1)dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=\sqrt{e^x-1},\ y=0,$ $x=\ln 2;$ б) $\begin{cases} x=t^2-1, \ \textit{петля}, \\ y=t^3-t; \end{cases}$ в) $r=\cos 2\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=\ln(2\cos x),$ $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{3}$ б) $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\frac{t}{3}\left(t^2-3\right); \end{cases}$ $y=0$ в) $\rho=\sin\varphi,$ $0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$

4. Знайти об’єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $xy=5,\ x=1,$ $x=2,\ y=0$ б) $y=x^{\frac{3}{2}},\ \ y=1$ $x=0$ в) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{64}=-1,$ $z=16$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{144}=1$ б) астроїди: $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t; \end{cases}$ в) лемніскати: $\rho=29\sqrt{\cos 2\varphi}$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{9x^2-9x+2}$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$ в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{cos(3x)dx}{\sqrt{(1-sin(3x))^5}}$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} e^t \cdot dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{-1}^{7}\left(x-4\sqrt{x+2}+8\right)dx.$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Знайти силу тиску води на поверхню кулі діаметром 4 м, якщо її центр знаходиться на глибині 3 м від поверхні води.

б) Циліндр висотою $H = 5\ м$ і радіусом основи $Rм = 2\ м$, наповнений газом під атмосферним тиском P_0, закритий поршнем. Обчислити роботу на ізотермічне стиснення газу при переміщенні поршня на відстань $h = 1\ м$ всередину циліндра. *Зауваження:* залежність між тиском P і об'ємом V виражається формулою $P{\cdot}V = const$.

в) Знайти координати центра ваги дуги кривої, заданої рівняннями: $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}ln\, y,\ 1\le y\le 2.$

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп'ютерної математики MahtCad.

Варіант №30

1. Обчислити визначений інтеграл

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{2arctg\,2} \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$ б) $\int\limits_{9}^{15} \sqrt{\frac{2-x}{x-18}}\,dx$ в) $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$

г) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x+1}{x^2+6x+9}dx$ д) $\int\limits_{-2}^{1} \left(x^2+4x+4\right)\cos x dx$ е) $\int\limits_{1}^{e} \ln^3 x dx$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, які задано: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах. Виконати креслення.

а) $y=\arccos x,\ y=0,$ $x=0;$ б) $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$ $y=3\ \left(0<x<4\pi,\ y\geq 3\right);$ в) $\rho=2-\sin\varphi.$

3. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням: а) у явному вигляді; б) параметрично; в) у полярних координатах.

а) $y=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-$ $-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),$ $1\leq x\leq a+1$ б) $\begin{cases} x=e^t\left(\cos t+\sin t\right), \\ y=e^t\left(\cos t-\sin t\right); \end{cases}$ $\frac{\pi}{6}\leq t\leq\frac{\pi}{4}$ в) $\rho=3e^{\frac{3}{4}\varphi},$ $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}$

4. Знайти об'єм тіла, якщо: а) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Ox*, б) воно утворено обертанням плоскої фігури, обмеженої даними лініями, навколо осі *Oy*, в) воно обмежене деякими поверхнями, заданими рівняннями.

а) $y=2x-x^2,$ $y=-x+2,\ x=0$ б) $y=x^2+1,\ \ y=10$ в) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{144}=1,$ $z=6,\ z=0$

5. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо вказаної осі аналітично заданої кривої: а) у декартових координатах – навколо осі *Ox*; б) у випадку параметричного представлення – навколо осі *Ox*; в) у полярних координатах – навколо полярної осі.

а) $y=8x^2,$ $0\leq x\leq 0{,}5$ б) кола: $\begin{cases} x=30\cos t, \\ y=30\sin t; \end{cases}$ в) кардіоїди: $\rho=30(1-\cos\varphi)$

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

а) $\int\limits_{3}^{\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(2x-1)^2}$ в) $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-55x}xdx$

7. Перевірити виконання умови теореми про диференціювання інтеграла із змінною верхньою границею; знайти відповідну похідну і вказати проміжок, на якому ця похідна існує: $\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{x^2}e^{-t^2}dt$.

8. Не обчислюючи даний визначений інтеграл, оцінити його величину:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx.$$

9. У всіх завданнях: 1) вказати загальну формулу для обчислення шуканої величини і перевірити, якщо визначається фізична величина, її розмірність; 2) провести розрахунок для заданих фізичних і геометричних параметрів, результат представити у системі одиниць СІ. Прискорення вільного падіння прийняти рівним $9{,}81\ м/с$.

а) Водопровідна труба має діаметр 50 мм, з одного боку її приєднано до баку, в якому рівень води на 1000 мм вище верхнього краю труби, а з іншого зачинено засувкою. Знайти повний тиск на засувку.

б) Дерев’яна прямокутна балка плаває у воді. Обчислити роботу по вилученню балки з води, якщо її розміри: *a = 10 м, b = 0,5 м, c = 0,2 м*, якщо густина деревини дорівнює $\rho_д = 650\,\frac{кг}{м^3}$, а густина води становить – $\rho_в = 1000\,\frac{кг}{м^3}$.

в) Знайти координати центру ваги плоскої фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2,\ y = 1$.

10. Перевірити результати, отримані при виконанні завдань 1 – 9 у системі комп’ютерної математики MahtCad.

Список використаних джерел

1. Архипов Г. И. Лекции по математическому анализу / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий. – М.: Дрофа, 2004. – 640 с.

2. Бугров Я. С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1980. – 464 с.

3. Геворкян Ю. Л. Інтегральне обчислення функції однієї змінної: навч. посібник / Ю. Л. Геворкян. – Київ.: ІСЛО, 1993. –144 с.

4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 2000. – 416 с.

5. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики / Б. П. Демидович. – М.: Астрель, 2001. – 656 с.

6. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К.: А.С.К., 2005. – 648 с.

7. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. – М.: Высшая школа, 1964. – 480 с.

8. Зарубин В. С. Интегральное исчисление функций одного переменного: учеб. для вузов / В. С. Зарубин, Е. Е. Иванова, Г. Н. Кувыркин, А. П. Крищенко. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 528 с.

9. Ильин В. А. Основы математического анализа / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М.: Физматлит, 2006. – Ч. 2. – 464 с.

10. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Интегральное исчисление функций одной переменной. Интегрирование дифференциальных уравнений / И. А. Каплан. – Харьков: Харьковский ордена Трудового красного знамени Государственный университет имени А. М. Горького, 1965. – Ч. 3. – 376 с.

11. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчёты) / Л. А. Кузнецов. − Спб.: Лань, 2005. – 246 с.

12. Лунгу К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – М.: Рольф, 2001. – 576 с.

13. Марон И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной / И. А. Марон. – М.: Наука, 1970. – 400 с.

14. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие для ВУЗов / В. П. Минорский. – М: Физматлит, 2006. – 336 с.

15. Пехлецкий И. Д. Математика: учебник / И. Д. Пехлецкий. – М.: Академия, 2005. – 304 с.

16. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2-х томах / Н. С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2001. – Т. 1.– 416 с., 2002. – Т. 2. – 544 с.

17. Письменный Л. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Л. Т. Письменный. – Москва: Айрис Пресс, 2006. – 608 с.

18. Райков Д.А. Одномерный математический анализ / Д. А. Райков. – М.: Высшая школа, 1982. –416 с.

19. Рябушко А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3-х частях / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть. – Минск: Вышэйшая школа, 1991. – Ч. 2. – 352 с.

20. Сборник задач по математике для втузов: учеб. пособие для ВТУЗов / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимиов и др. Под ред. А. В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – Ч.1. – 464 с.

21. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник по математическому анализу / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2001. – Т. 2. – 616 с.

22. Черненко В. Д. Высшая математика в примерах и задачах / В. Д. Черненко. – СПб: «Политехника», 2003. – Т. 1. – 703 с.

23. Шнейдер В. Е. Краткий курс высшей математики: учебн. пособие для втузов / В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов. – М.: Высшая школа, 1972. – 640 с.

24. Шипачев В. С. Высшая математика / В. С. Щипачёв. – М.: Лань, 2005. – 479 с.

Додаток 1

Таблиця основних інтегралів

1	$\int dx = x + C$	2	$\int 0 \cdot dx = C$
3	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$	4	$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln \mid x \mid + C;$
5	$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C;$	6	$\int e^{x} dx = e^{x} + C;$
7	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$	8	$\int \cos x dx = \sin x + C;$
9	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C;$	10	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C;$
11	$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C;$	12	$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C;$
13	$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C;$	14	$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\, dx = \operatorname{th} x + C;$
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \mid x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \mid + C;$	16	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln \mid f(x) \mid + C;$
17	$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	18	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C;$
19	$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C;$	20	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$
21	$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left\lvert \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\rvert + C;$	22	$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left\lvert \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\rvert + C;$
23	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \mid \cos x \mid + C;$	24	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \mid \sin x \mid + C.$

25 $\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C;$

26 $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$

27 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$

28 $\int \sqrt{x^2 \pm a}\, dx = \frac{a}{2} \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a} \right\rvert + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a} + C$

Додаток 2

Контрольні питання за навчальним модулем
«Визначений інтеграл та його застосування»

Тема 1. Визначений інтеграл (основний зміст).

Задачі, які призводять до понять визначеного інтегралу. Визначений інтеграл; означення та геометричний зміст. Найпростіші властивості визначеного інтегралу. Теореми про середнє інтегральне. Суми Дарбу. Необхідна та достатня умови існування визначеного інтегралу. Інтеграл зі змінною верхньою границею, його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца. Методи обчислення визначеного інтегралу.

Дайте відповіді на питання.

1. Наведіть приклади задач, які призводять до обчислення визначеного інтегралу.
2. Що називається визначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний і фізичний зміст?
3. Що таке інтегральна сума? Який її геометричний і фізичний зміст?
4. Наведіть формулу визначеного інтеграла як границю інтегральної суми.
5. Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
6. Сформулюйте необхідну умову інтегрованості функції.
7. У чому полягає достатня умова інтегрованості?
8. Наведіть формулу Ньютона-Лейбніца, що встановлює зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами.
9. Якою подвійною нерівністю задається оцінка визначеного інтеграла?
10. Що називається середнім інтегральним значенням функції на відрізку?
11. Сформулюйте теорему про середнє інтегральне. У чому полягає її геометричний зміст?
12. Що таке визначений інтеграл зі змінною верхньою границею?
13. Як обчислити визначений інтеграл із змінною нижньою границею?

14. Яким чином, яких випадках і для чого здійснюється заміна змінної у визначеному інтегралі? Яка існує відмінність від подібної операції для невизначеного інтегралу?

15. Наведіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Тема 2. Застосування визначеного інтегралу (основний зміст).

Обчислення площі фігури за допомогою визначеного інтегралу. Обчислення довжини дуги, об’єму тіла, площі поверхні обертання. Застосування визначеного інтегралу до розв’язування фізичних задач.

Дайте відповіді на питання.

1. Розкрити поняття області у контексті розгляду площі плоскої фігури. Пояснити, яка область є замкненою, а яка – обмеженою?
2. Яка область називається правильною (стандартною) у напрямку осі Oy та осі Ox? Просто правильною?
3. Як знаходиться площа правильної у напрямку осі Oy області (правильної у напрямку осі Ox області)?
4. Яким чином знаходиться площа криволінійного сектора в полярних координатах?
5. Яка область називається правильною (стандартною) у напрямку координатних променів полярної системи координат? Як обчислити площу зазначеної області?
6. Наведіть формули знаходження довжини дуги плоскої лінії для наступних випадків: а) лінія задана явно в прямокутних координатах; б) лінія задана параметрично в прямокутних координатах; в) лінія задана в полярних координатах?
7. Що таке кривина плоскої лінії? Як вона обчислюється?
8. Розкрийте поняття кола, центра і радіусу кривини?
9. Що називається вершиною плоскої кривої?
10. Як знаходиться об’єм тіла з відомими площами паралельних перетинів?

11. Як знаходиться об’єм тіла обертання? Чим відрізняються формули для обчислення об’єму тіла утвореного обертанням однієї і тієї ж плоскої фігури навколо осі *Ox* та *Oy*?
12. Як знаходиться площа поверхні обертання?
13. Як знаходяться маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої дуги?
14. Як знаходяться маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої області?
15. Запишіть формулу для обчислення роботи змінної сили.
16. Запишіть формулу для обчислення шляху прямолінійного руху, використовуючи визначений інтеграл.
17. Коли виникає потреба в чисельному інтегруванні? Наведіть формули лівих і правих прямокутників, трапецій, Сімпсона для наближеного обчислення визначеного інтеграла.

Тема 3. Невласні інтеграли (основний зміст).

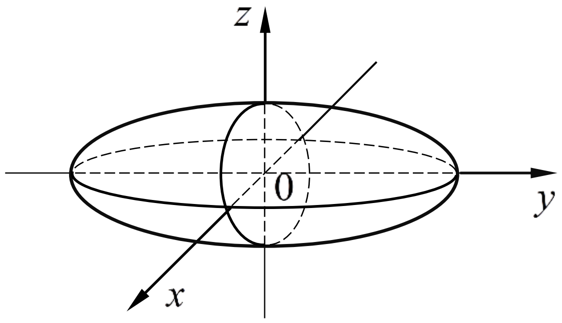
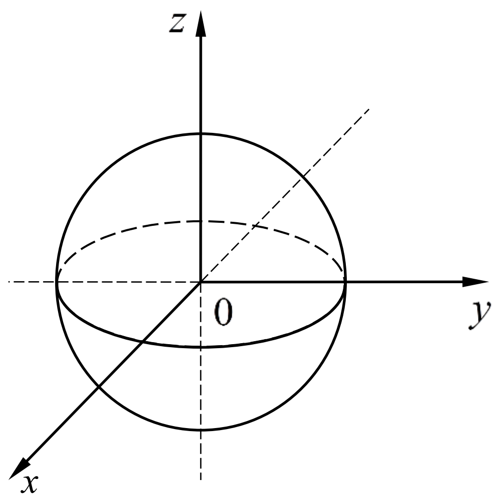
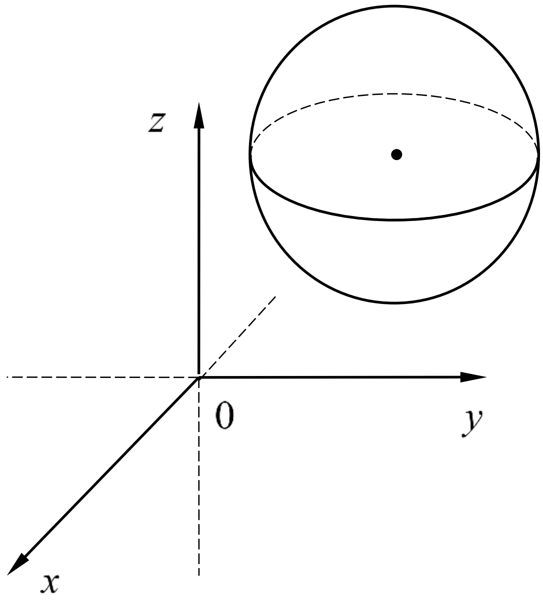
Невласні інтеграли I роду, їх обчислення. Ознаки збіжності. Невласні інтеграли II роду, їх збіжність. Формули інтегрування частинами та заміна змінної у невласних інтегралах.

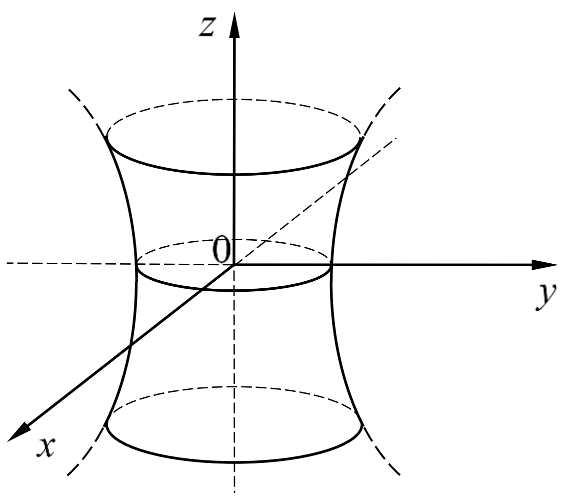
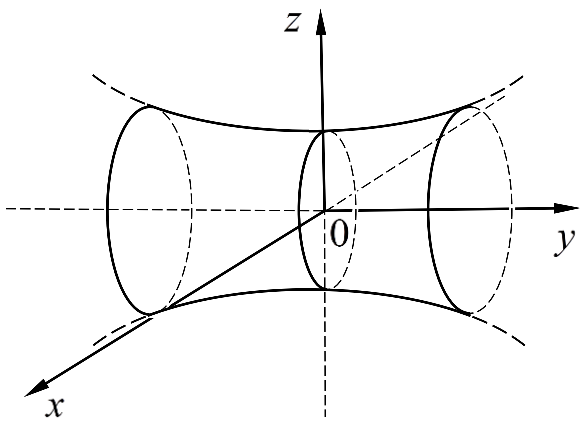
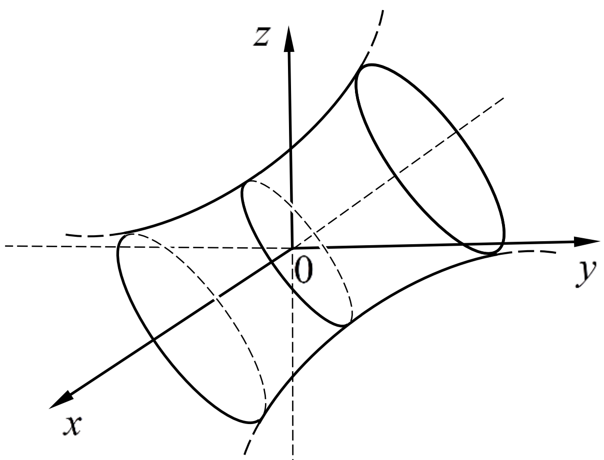
Дайте відповіді на питання.

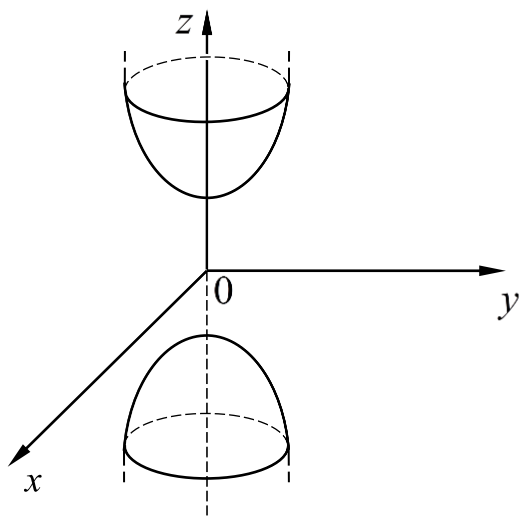
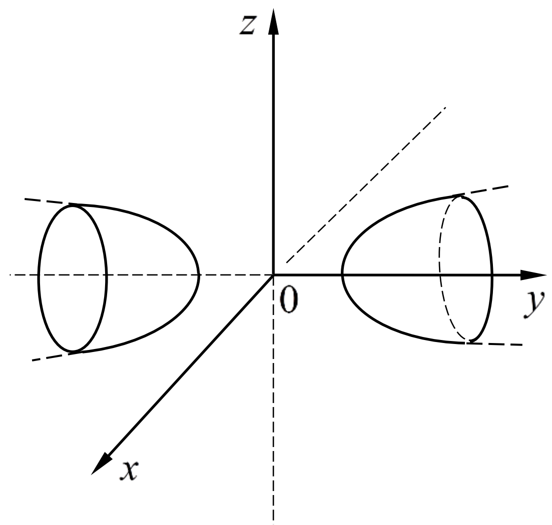
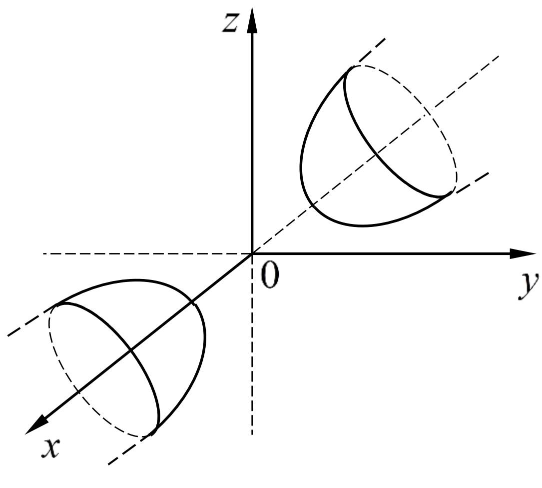
1. Що таке невласний інтеграл на необмеженому проміжку? У чому полягає його геометричний зміст?
2. Що таке невласний інтеграл від необмеженої функції? У чому полягає його геометричний зміст?
3. Сформулюйте ознаки збіжності невласних інтегралів з нескінченною верхньою границею.
4. Які ви знаєте ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду? Для чого ці ознаки існують і для якого класу задач передусім застосовуються?
5. Яким чином відбувається інтегрування частинами та заміна змінної у невласних інтегралах першого та другого роду?

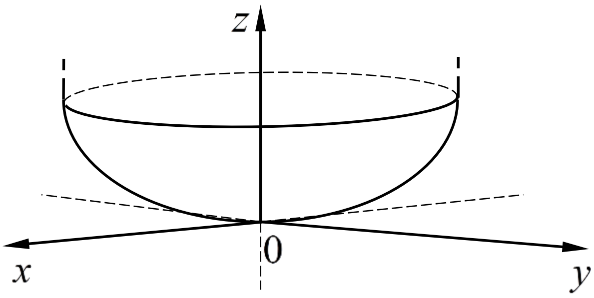
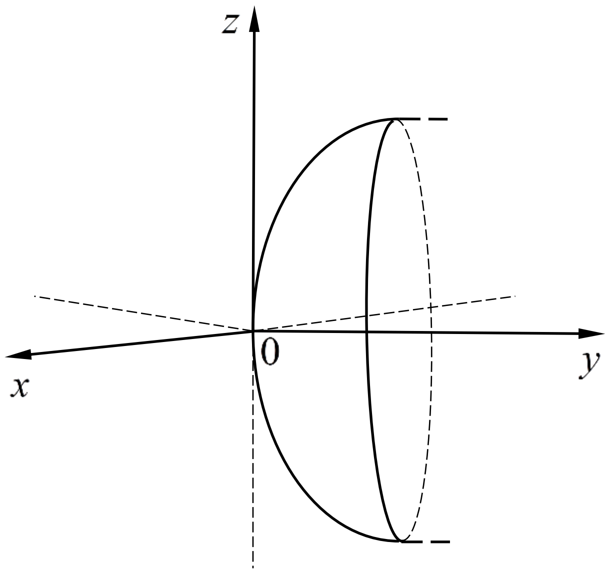
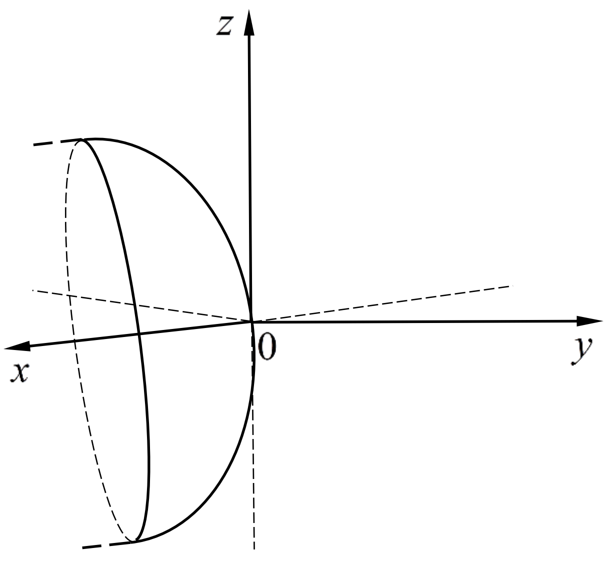
Додаток 3

Поверхні другого порядку та їх рівняння

Схематичне зображення поверхні другого порядку	Рівняння у декартовій системі координат, визначення
Еліпсоїд 	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ *Еліпсоїд* – замкнута центральна поверхня другого порядку, що має центр симетрії та три вісі. Точки перетину координатних осей з еліпсоїдом називаються його вершинами. Перетин еліпсоїду площиною є еліпсом.
Сфера  	*Сфера* – замкнута центральна поверхня другого порядку, всі точки якої однаково віддалені від фіксованої точки (центру сфери). Якщо центр сфери співпадає з початком координат, то її задають рівнянням: $$x^2+y^2+z^2=R^2,$$ де $O(0;0;0)$ – центр сфери, R – її радіус. Якщо центр сфери не співпадає з початком координат, то її задають рівнянням: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$, де $O(x_0;y_0;z_0)$ – центр, R – радіус, $(x;y;z)$ – координати довільної точки сфери. Відрізок, що поєднує центр сфери з будь-якою точкою на її поверхні, а також його довжина, називається радіусом сфери.

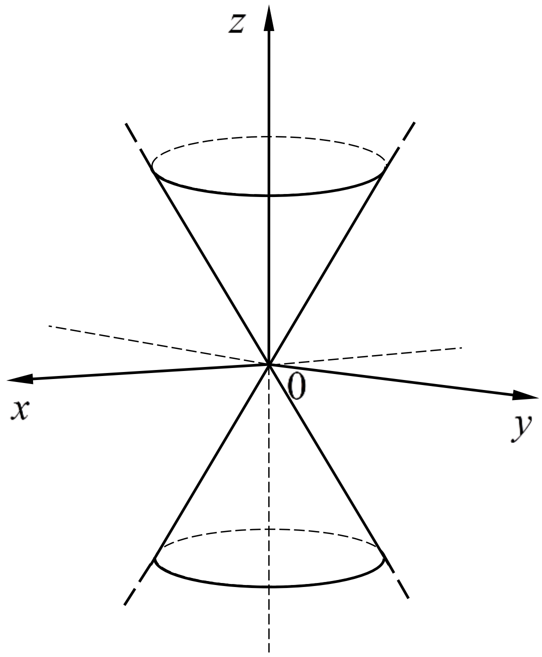
Схематичне зображення поверхні другого порядку	Рівняння у декартовій системі координат, визначення
Однопорожнинний гіперболоїд  (a)  (b)  (c)	*Однопорожнинний гіперболоїд* – незамкнута центральна поверхня другого порядку. Такий гіперболоїд має одну порожнину. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$ де a, b, c – напівვісі гіперболоїда. Гіперболоїд необмежено прямує до, так званого, асимптотичного конуса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$ Переріз гіперболоїда площиною, паралельною Oz при $x=\pm a$ або $y=\pm b$ – це пара прямих, що перетинаються. Асимптотичний конус перетинає гіперболоїд по двом прямим, що є асимптотами вище означених гіпербол (рис. a). Якщо переріз гіперболоїда (рис. b) площиною, що проходить через вісь Oy, є гіпербола, то: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$ Якщо переріз гіперболоїда площиною, що проходить через вісь Ox, є гіперболою (рис. c), то: $\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$ Переріз гіперболоїда на рис. c площиною, яка паралельна Oyz – еліпс (при $x=0$ еліпс називається горловим). Через кожну точку однопорожнинного гіперболоїда проходять дві прямі, які повністю належать його поверхні – прямолінійні твірні.

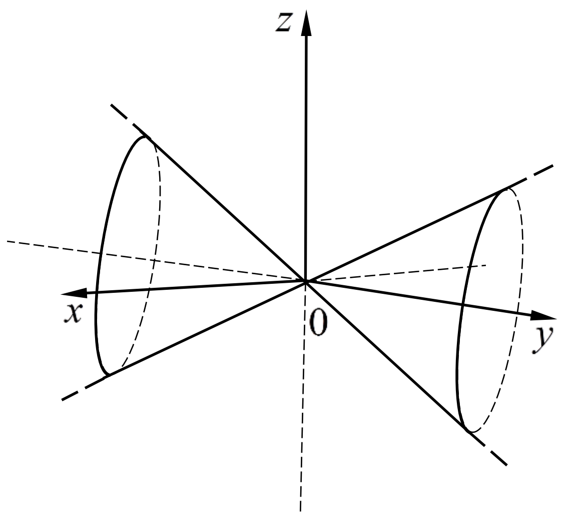
Схематичне зображення поверхні другого порядку	Рівняння у декартовій системі координат, визначення
Двопорожнинний гіперболоїд  (a)  (b)  (c)	*Двопорожнинний гіперболоїд* – незамкнута центральна поверхня другого порядку, утворений таким чином, що складається з двох порожнин. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (рис. a). Кожна площина, що проходить через вісь Oz, перетинає двопорожнинний і однопорожнинний гіперболоїди по гіперболам. Переріз двопорожнинного гіперболоїда на рис. a площиною, паралельною Oz, – гіпербола. Якщо переріз гіперболоїда площиною, паралельною Oy, є гіперболою (рис. b), то: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$ Якщо $a=c$ (рис. b), то гіперболоїд є гіперболоїдом обертання, який утворюється обертанням гіперболи з півосями a і b навколо вісі $2b$. Коли $a=b=c$, то гіперболоїд називається правильним. А його перерізами площинами Oxy та Oyz є рівнобічні гіперболи (рис. b). Якщо переріз гіперболоїда площиною, паралельною Ox, є гіперболою (рис. c), то: $\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1.$

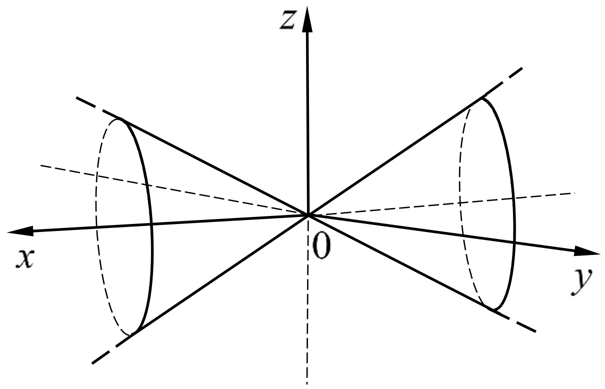
Схематичне зображення поверхні другого порядку	Рівняння у декартовій системі координат, визначення
Еліптичний параболоїд    	$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \ \ (pq>0),$$ де площини xOz та yOz є площинами симетрії параболоїда, а Oz – вісь симетрії. *Еліптичний параболоїд* – незамкнута необмежена поверхня другого порядку, один з типів параболоїдів. Поверхня, утворюється при русі параболи, вершина якої переміщується уздовж іншої нерухомої параболи, причому осі парабол залишаються взаємно перпендикулярними, а самі параболи розташовані увігнутістю у один бік. $$\frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2y \ \ (pq>0),$$ де площини xOy та yOz є площинами симетрії параболоїда, а Oy – вісь симетрії. $$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2x \ \ (pq>0),$$ де площини xOy та xOz є площинами симетрії параболоїда, а Ox – вісь симетрії. Перерізами еліптичного параболоїда є паралельні осі симетрії параболи, або перпендикулярні їй еліпси. Якщо $p=q$, то поверхня є параболоїдом обертання навколо відповідної осі.

<table>
<tr><th>Схематичне зображення поверхні другого порядку</th><th>Рівняння у декартовій системі координат, визначення</th></tr>
<tr><td>

Конус другого порядку







</td><td>

Конус другого порядку – множина прямих (твірних) які поєднують усі точки деякої направляючої кривої другого порядку (еліпса або кола) з однією точкою простору (вершиною).

Якщо направляюча крива лежить у площині, яка паралельна xOy, то:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},$$

де $a, b, c > 0$.

Вершина конуса ортогонально проектується у центр направляючої кривої другого порядку.
Перерізом конуса площиною паралельною xOy є еліпс або круг, а площинами $x=0$ або $y=0$ – пара прямих, що перетинаються.

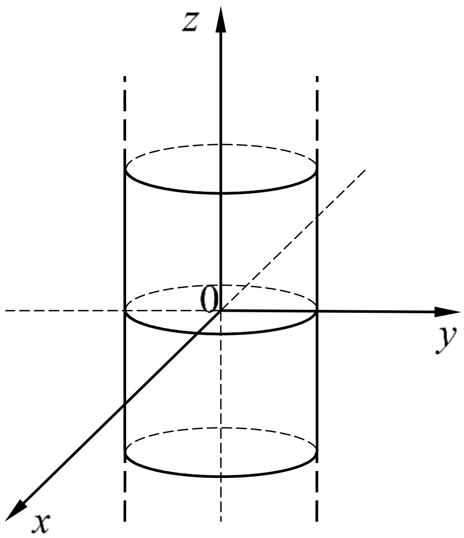
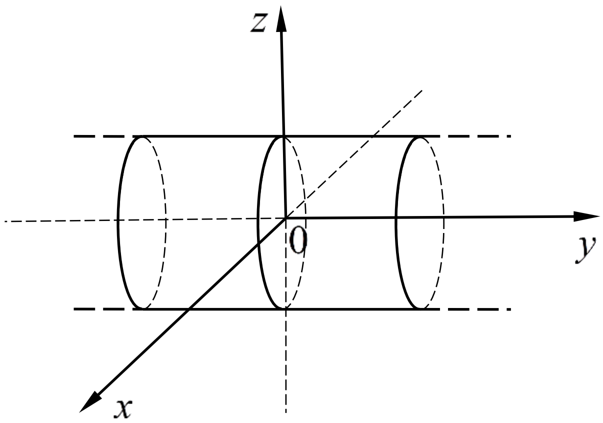
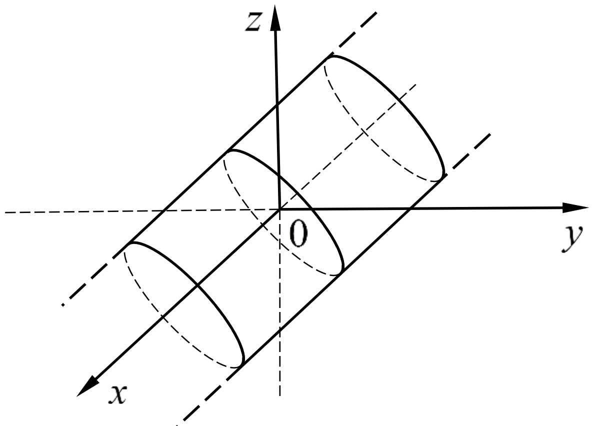
Якщо направляюча крива лежить у площині, яка паралельна xOz, то:

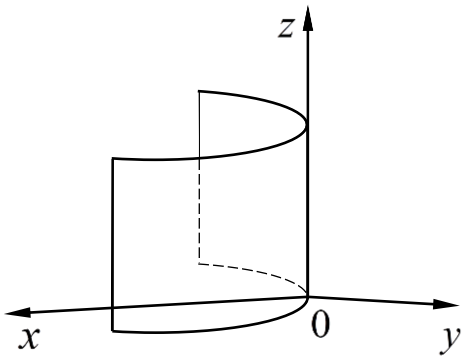
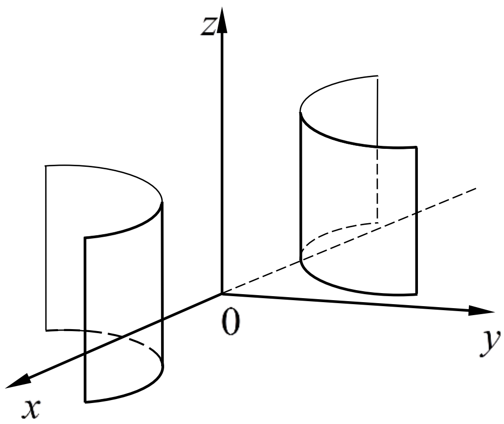
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{y^2}{b^2}.$$

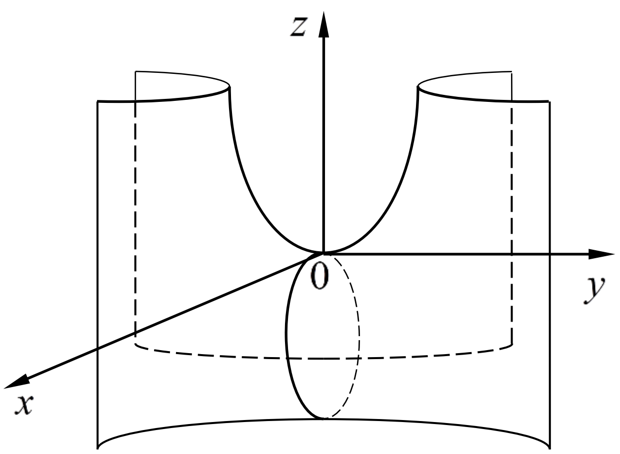
Якщо направляюча крива лежить у площині, яка паралельна yOz, то канонічне рівняння конуса другого порядку у декартовій системі координат має вигляд:

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}.$$

</td></tr>
</table>

Схематичне зображення поверхні другого порядку	Рівняння у декартовій системі координат, визначення
Еліптичний циліндр   	У циліндричних поверхонь другого порядку направляючими є криві другого порядку, а твірними – прямі, перпендикулярні площинам, у яких розташовані відповідні криві. Якщо направляюча лежить в одній з координатних площин, то твірна паралельна третій координатній осі. Назва циліндра другого порядку визначається назвою відповідної направляючої. *Еліптичний циліндр* – незамкнена центральна поверхня другого порядку, направляюча лінія якої – еліпс. Якщо твірна паралельна осі аплікат, то: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ Якщо твірна паралельна осі ординат, то канонічне рівняння такого еліптичного циліндра має вигляд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$ Якщо твірна паралельна осі абсцис, то у рівнянні відсутня координата – x: $\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Схематичне зображення поверхні другого порядку	Рівняння у декартовій системі координат, визначення
Параболічний циліндр  	*Параболічний циліндр* – незамкнута нецентральна поверхня другого порядку, направляюча лінія якої – парабола. Якщо твірні паралельні осі *Oz*, то поверхня задається рівнянням: $y^2 = 2px$.
Гіперболічний циліндр  	*Гіперболічний циліндр* – циліндрична незамкнута центральна поверхня другого порядку, направляюча лінія якої – гіпербола. $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Схематичне зображення поверхні другого порядку	Рівняння у декартовій системі координат, визначення
Гіперболічний параболоїд 	*Гіперболічний параболоїд* – необмежена нецентральна поверхня другого порядку, яка утворюється шляхом поступального переміщення у просторі вершини однієї параболи вздовж іншої нерухомої параболи таким чином, що площина та вісь рухомої параболи залишаються увесь час паралельними самі собі. При цьому параболи розташовані увігнутістю у різні боки, а поверхня має вигляд сідла. У прямокутній системі координат, якщо вершина параболоїда знаходиться у її центрі: (0; 0; 0), вісь *Oz* є віссю симетрії, площини *xOz* та *yOz* є площинами симетрії параболоїда, то: $$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \ \left(p>0, q>0\right).$$ Перерізи параболоїда площинами *xOz* та *yOz* – це параболи, а площинами паралельними площині *xOy* – це гіперболи (при $z=0$ – пара прямих, що перетинаються). Через кожну точку гіперболічного параболоїда проходять дві прямі, які повністю належать його поверхні, – прямолінійні твірні.

Навчальне видання

ДУБІНІНА Оксана Миколаївна

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ
І СИСТЕМА КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ MATHCAD

Навчально-методичний посібник
для студентів вищих технічних навчальних закладів
всіх спеціальностей

Відповідальний за випуск проф. Любчик Л. М.
Роботу до видання рекомендував проф. Горілий О. В.

В авторській редакції

План 2017 р. / п. 65

Підписано до друку 16.05.2017 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Друк – цифровий. Гарнітура – Times New Roman. Ум. друк. арк. – 13,25.
Наклад 350 прим. Зам № ЛГ00-002375.

Видавничий центр НТУ «ХПІ»
Виготовлювач: ТОВ «ДРУКАРНЯ МАДРИД»
61024, Харків, вул. Максиміліанівська, 11
Тел.: (057) 756-53-25
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4399 від 27.08.2012 р.
www.madrid.in.ua e-mail: info@ madrid.in.ua